2.1. Klassifikation von PDE I. Seien a, b, f und g differenzierbare Funktionen. Entscheiden Sie ob die Folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ homogen linear, inhomogen linear oder nicht linear sind und bestimmen sie die Ordnung. Im Fall einer homogen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung entscheiden Sie ob die Gleichung elliptisch, hyperbolish oder parabolish ist.

(a) $u_{xxx} + u_y = f$

(b) $au_{xx} + bu^2 = 0$

(c) $u_x u_y = 0$

(d) $2u_{xx} + u_x + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

(e) $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.

2.2. Klassifikation von PDE II (Prüfung 9. August 2017).

Seien a, b und g differenzierbare Funktionen mit $g > 0$.

Entscheiden Sie, ob die Folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ linear oder nichtlinear sind und bestimmen Sie die Ordnung; falls linear, entscheiden Sie, ob sie homogen oder nicht homogen sind. Im Fall einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung entscheiden Sie, ob die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $au_{xxx} + b(u^4 + u) = 0$

(b) $a^2 u_{xx} + u_x u_y = 1$

(c) $4u_{xx} + u_x + u_{xy} + 6u_{yy} = 0$

(d) $(x^2 - 2)u_{xx} + 4xyu_{xy} + (y^2 - 2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 16\}$.

2.3. Kandidatenlösungen.

(a) Wenden Sie den Laplace-Operator ($\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$) auf die folgende Funktion an:

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Für welche Werte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist u eine Lösung der PDE $\Delta u = \alpha u^\beta$?

(b) Seien $c, k \in \mathbb{R}$, mit $c > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(t, x) = f(t) \sin(kx).$$

Berechnen Sie $u_{tt} - c^2 u_{xx}$. Für welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist u eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$?

2.4. Elementare PDE. Bestimmen Sie die (zweite differenziebar) Lösungen der folgenden PDE auf $\mathbb{R}^2$:

(a) $u_{xx} - u = 0$

(b) $u_{xy} + 5u_x = 0$

(c) $u_y + 3y^2 u = 0$

(d) $u_{xx} - 6u_x + 9u = 4\mathrm{e}^{3y}$.

Tipp: diese PDE sind ähnlich wie ODE. Man kann zum Beispiel die y-Variable "einfrieren" und die 1-variable Funktion $v^y(x) = u(x, y)$ betrachten.