

3.1. Wellengleichung und Superpositionsprinzip. Finden Sie eine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - 4u_{xx} = \sin^2(t) + \tan^2(x)$$

mit Hilfe des Superpositionsprinzip.

3.2. Variablenwechsel. Führen Sie den angegebenen Variablenwechsel in den folgenden PDE durch.

(a) $u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0,$

$$\text{Variablenwechsel} \begin{cases} s = x + y, \\ t = 2x. \end{cases}$$

(b) $u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0,$

$$\text{Variablenwechsel} \begin{cases} s = \cos(x) + x - y, \\ t = \cos(x) - x - y. \end{cases}$$

(c) Finden Sie die allgemeine Lösung u in (b).

3.3. Anfangswertproblem. Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_{xx} = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = \cos x + 7x & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = e^{2x} + 4 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.4. Druckwelle. Eine Druckwelle, verursacht durch eine Explosion, erfüllt die Gleichung

$$P_{tt} - 25P_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

wobei $P(x, t)$ den Druck zur Zeit t am Ort x bezeichnet. Die Anfangsbedingungen zur Zeit der Explosion $t = 0$ sind

$$P(x, 0) = \begin{cases} 8 & |x| \leq 3, \\ 0 & |x| > 3 \end{cases},$$
$$P_t(x, 0) = \begin{cases} 3 & |x| \leq 3, \\ 0 & |x| > 3. \end{cases}$$

Ein Gebäude steht am Punkt $x_0 = 12$ und hält einem Druck von $P = 9$ stand. Wird das Gebäude zusammenbrechen?