4.1. Charakteristisches Dreieck Wir betrachten die folgende inhomogene Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = \mathrm{e}^{-t} + \cos(x+2) \quad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = x^2 \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie und zeichnen Sie das Charakteristische Dreieck an den punkten $(0,1)$, $(0,3)$ und $(2,4)$.

(b) Finde die Lösung des Problems mit Hilfe der Formel von d'Alembert.

4.2. Druckwelle II Betrachten Sie noch einmal die Druckwelle P aus Ex. 3.4, Serie 3. Für welche Punkte der Raumzeit (x,t) ist $P(x,t) = 0$?

4.3. Superpositionsprinzip Betrachten Sie das inhomogene Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos(x+t) & x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Reduzieren Sie das Problem zuerst auf ein homogenes Problem und benutzen Sie dann die d'Alembert Formel für die homogene Wellengleichung.
Hinweis für eine partikuläre Lösung: aufgrund unserer Erfahrung mit ODE, einen geeigneten Ansatz ist: $v(x,t) = (\alpha t + \beta)(\gamma \cos(x+t) + \delta \sin(x+t))$.

4.4. Fast eine Wellengleichung Finde die allgemeine Lösung von

$$\begin{cases} u_{ttx} - u_{xxx} = t^2 & x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u_x(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_{xt}(x,0) = \sin(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

4.5. Orthogonalitätsrelationen

(a) Beweise die folgenden Relationen für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq n \\ 2\pi, & \text{falls } m = n. \end{cases}$$

(b) Beweise die nachstehenden Relationen für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall m,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{falls}\, m = 0 \\ 0 & \text{falls}\, m \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall m, n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{falls}\, m = n \neq 0 \\ -\pi & \text{falls}\, m = -n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{falls}\, m = n = 0 \\ \pi & \text{falls}\, m = \pm n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Tipp: für (b) kann man die bekannten Eulerschen Formeln benutzen:

$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}, \qquad \sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i} \qquad t \in \mathbb{R}.$$