

5.1. Periodische Funktionen Bestimmen Sie, welche der folgenden Funktionen periodisch sind, und berechnen Sie die Periode (falls möglich):

- (a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$,
- (b) $\tan(\sin(x))$,
- (c) $\sin^2(x) - \cos^2(x)$,
- (d) $\sin(x) + \frac{x^2}{2} \cos(x)$,
- (e) $\sin(2x) \cos(2x)$.

5.2. Reelle Fourier-Reihen Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihen der periodischen Fortsetzung der folgenden Funktionen:

a) 2π -periodische Fortsetzung von

$$f(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

b) 2-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-1, 1].$$

5.3. Fourier-Reihen und numerische Reihen (Prüfung Februar 2012) Sei $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

- (a) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der 2π -periodischen Fortsetzung von f .
- (b) Berechnen Sie (mithilfe von (a)) den Wert der Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}.$$

5.4. Integration periodischen Funktionen Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine T periodische Funktion. Zeige, dass für alle $A \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^T f(x) dx = \int_A^{A+T} f(x) dx.$$