6.1. Gerade und ungerade Fortsetzung Sei $f(x) = x$ definiert auf $[0, \pi]$.

(a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechne ihre Fourier Reihen.

i) f_1 ist die gerade 2π periodische Fortsetzung von f,

ii) f_2 ist die ungerade 2π periodische Fortsetzung von f,

iii) $f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$,

iv) f_4 ist die π periodische Fortsetzung von f.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von a) die Gleichheit

$$\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6.2. Reelle un Komplexe Fourier-Reihe Sei

$$f(x) = e^x \quad \text{für} \quad x \in (0, \pi)\,.$$

Finden Sie die komplexe und reelle Fourier-Reihe der geraden und ungeraden 2π periodischen Fortsetzungen von $f(x)$.

6.3. Fragen über die Fourier-Reihe Darstellung

(a) Kann die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 9\cos x$$

durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden?

(b) Betrachte die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3.$$

Ist es möglich, dass die 2π-periodische Fortsetzung durch eine endliche Fourier-Reihe dargestellt wird?

6.4. Reelle un Komplexe Fourier-Reihe II Gegeben sei

$$f(x) = \cosh^2(x) \quad \text{für} \quad x \in (-1, 1)\,.$$

(a) Finden Sie die komplexe Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Finden Sie die reelle Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

Erinnerung: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

6.5. Fourier-Reihen und numerische Reihen (Prüfung August 2017) Hier nennen wir $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$. Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixiert; betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f_\alpha(x) = \cos(\alpha x) \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

(a) Nehmen Sie für diese, *und nur für diese*, Teilaufgabe an, dass $\alpha = \frac{1}{\pi}$. Skizzieren Sie den Graph von f_α.

(b) Bestimmen Sie die komplexe und die reelle Fourier-Reihe von f_α. Konvergieren diese Reihen gegen die 2π-periodische Fortsetzung von f_α? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Mithilfe der folgenden elementaren Identitäten:

$$\cosh(x) = \cos(ix), \qquad \sinh(x) = \frac{\sin(ix)}{i},$$

bestimmen Sie den Wert von:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Hinweis für (c): Betrachten Sie die reelle Fourier-Reihe von $f_\alpha(x)$ für geeignete $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.