7.1. Fourier-Reihe I Gegeben sei

$$f(x) = |\sin(x)| \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi).$$

(a) Finden Sie die komplexe Fourier-Reihe der periodischen Fortsetzung von f.

(b) Finden Sie mit Hilfe von (a) die reelle Fourier-Reihe der periodischen Fortsetzung von f.

7.2. Fourier-Reihe II (Prüfung Januar 2017) Sei $f(x) = x^2/2$ für $x \in [0, 2]$.

(a) Berechnen Sie die reelle und komplexe Fourier-Reihe der geraden 4-periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Berechnen Sie mithilfe von (a) den Grenzwert von

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m^2}.$$

7.3. Wellengleichung mit beschränkter Definitionsmenge

(a) Betrachten Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0, L], \end{cases} \tag{1}$$

wo f und $L > 0$ gegeben sind. Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\mu(x,t) = \frac{1}{2}(F(x+ct) + F(x-ct)),$$

wobei F die *ungerade* $2L$-periodische Fortsetzung von f ist, eine Lösung von (1) ist.

(b) Betrachten Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0 & x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in [0, L], \end{cases} \tag{2}$$

wo g und $L > 0$ gegeben sind. Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\nu(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

wobei G die *ungerade* $2L$-periodische Fortsetzung von g ist, eine Lösung von (2) ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Fourier-Reihen von F und G schreiben Sie μ und μ ausgehend von diesen Ausdrücken.

7.4. Wärmeleitungsgleichung mit periodischen Anfangsbedingungen Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \sin^3(3\pi x) + 4\sin(4\pi x)\cos(4\pi x) & x \in [0,1]. \end{cases}$$