8.1. Fourier-Reihen und Numerischen Reihen Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x(1-x).$$

Finden Sie die reelle Fourierreihen der geraden und ungeraden periodischen Fortsetzungen von f. Bestimmen Sie mit diesen den Grenzwert von

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

8.2. Wärmeleitungsgleichung mit Neumannrandbedingungen

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe der π-periodischen Fortsetzung von $\sin(x)$. Konvergiert diese Fourierreihe gegen $\sin(x)$ in $[0,\pi]$? Begründen Sie deine Antwort.

(b) Mit der Methode der Separation der Variablen lösen Sie das folgende Anfangs- und Randwertproblem (mit homogen Neumannranbedingungen):

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u_x(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \sin(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(c) Das PDE-Modell in (b) beschreibt die Wärmeausbreitung in einem sehr dünnen isolierten Stab. Berechnen Sie die Grösse

$$U(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x,t)\, \mathrm{d}x,$$

die man als mittlere Temperatur des Stabs zur Zeit t interpretieren kann. Was können Sie schliessen?

8.3. Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletbedingungen (Prüfung Februar 2012) Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & x \in (0,2),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,2), \end{cases}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in (0,1), \\ 2-x & \text{falls } x \in [1,2). \end{cases}$$

8.4. Inhomogene Dirichletrandbedingungen Lösen Sie das folgende inhomogene Problem für die Wärmenleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = 1 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(1,t) = 2 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x + \cos^2(\pi x) & x \in (0,1). \end{cases}$$