

9.1. Inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Neumannrandbedingung Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = A \cos(\alpha t) & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = 1 + \cos^2(\pi x) & x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

wobei $A \neq 0$ und $\alpha \neq 0$ gegeben sind.

Hinweis: Wie bei den inhomogenen Randbedingungen, betrachten Sie zuerst eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

9.2. Inhomogene Wellengleichung mit beschränkter Definitionsmenge Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1 & (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(x, 0) = \sin(x) & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

9.3. Wärmeleitungsgleichung in einem Ring Betrachten Sie einen wärmeisolierten, dünnen, blechernen Ring mit Radius 1, der durch den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ modelliert wird. Zur Anfangszeit $t = 0$ ist die Temperatur des Kreises proportional (mit Proportionalitätskonstante 1) zu der Distanz von der Stelle 1:

$$u_0(x) = \text{dist}_{S^1}(x, 1) \quad \text{für jedes } x \in S^1.$$

(a) Finden Sie, für jede Stelle x und jede Zeit t , den Ausdruck $u(x, t)$ für die Temperatur des Kreises. *Schritte:*

- Jede Stelle $x \in S^1$ kann als $x = e^{i\theta} \simeq (\cos \theta, \sin \theta)$ für $\theta \in [0, 2\pi]$ geschrieben werden. Somit arbeiten wir mit der Bogenmass-Koordinate $\theta \in [0, 2\pi]$. Überprüfen Sie, dass u_0 in der Bogenmass-Koordinate durch

$$u_0(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{falls } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 2\pi - \theta & \text{falls } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

gegeben ist.

- Finden Sie den Ausdruck für $u(\theta, t)$ durch die Lösung des Problems:

$$u_t - u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{für } (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+,$$

mit Anfangsbedingung wie in (a).

(b) Nehmen Sie jetzt an, dass der Ring nicht isoliert ist und die Energiestromdichte der Wärmestrahlung des Ringes proportional zur Zeit (mit Proportionalitätskonstante 2) ist. In anderen Worten, es gilt:

$$u_t - u_{\theta\theta} = -2t \quad \text{für } (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+.$$

mit Anfangsbedingung wie in (a). Finden Sie den Ausdruck für $u(\theta, t)$.

9.4. Sehr Wichtig: der Laplace-Operator in Polarkoordinaten *Bemerkung:* Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten wird in Zukunft, sowohl in den Übungen als auch in der Vorlesung, benutzt. Wenn wir eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$ betrachten, ist es möglich, diese in Polarkoordinaten:

$$\begin{cases} x = x(r, \phi) = r \cos(\phi) \\ y = y(r, \phi) = r \sin(\phi) \end{cases}$$

auszudrücken, d.h. $u(r, \phi) = u(x(r, \phi), y(r, \phi))$.

(a) Drücken Sie die folgende Funktionen in Polarkoordinaten aus:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= x^2 + y^2, \\ u_2(x, y) &= x + y + y^2, \\ u_3(x, y) &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel können wir dann diese Funktionen sowohl nach r als auch nach ϕ partiell ableiten.

(b) Überprüfen Sie, mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt

$$\begin{aligned} \partial_r u(r, \phi) &= (\partial_x u) \cos \phi + (\partial_y u) \sin \phi \\ \partial_\phi u(r, \phi) &= -(\partial_x u) r \sin \phi + (\partial_y u) r \cos \phi. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein die folgende Relation für die partiellen Ableitungen $\partial_x u$ und $\partial_y u$:

$$\begin{pmatrix} \partial_r u \\ \partial_\phi u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}.$$

(c) Beweisen Sie, mit Hilfe einer Inversion der Matrix, dass in Komponentenschreibweise gilt

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \cos \phi (\partial_r u) - \frac{1}{r} \sin \phi (\partial_\phi u), \\ \partial_y u &= \sin \phi (\partial_r u) + \frac{1}{r} \cos \phi (\partial_\phi u).\end{aligned}$$

Berechnen Sie dann mit diesen Formeln und mit Hilfe der Kettenregel, die Ausdrücke $\partial_{xx}^2 u$ und $\partial_{yy}^2 u$ in Polarkoordinaten, das heisst

$$\partial_{xx}^2 u = \partial_x (\partial_x u) = \cos \phi (\partial_r (\partial_x u)) - \frac{1}{r} \sin \phi (\partial_\phi (\partial_x u)) = \dots$$

(d) Fassen Sie das Ergebnis zusammen, um zu folgern, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta u(r, \phi) = \partial_{rr}^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi}^2 u.$$

9.5. Berechnung von Δ Sei $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie Δf für folgende Funktionen:

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = |\vec{x}|^2$, in kartesischen Koordinaten
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = e^{|\vec{x}|^2}$, in Polarkoordinaten
- (c) $f : \{1 < |x| < 2\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \frac{x_1^2}{|\vec{x}|^2}$ in Polarkoordinaten.