10.1. Eigenschaften der harmonischen Funktionen Sei $u(x,y)$ eine harmonische Funktion in $B_6(0) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 36\}$, welche folgender Randbedingung genügt:

$$u(x,y) = -(1+x^2) \quad \text{für } (x,y) \in \partial B_6(0).$$

(a) Zeigen Sie, dass $-37 < u(x,y) < -1$, *ohne* u explizit zu finden. Bestimmen Sie diese Werte.

(b) Ist es möglich, dass ein Punkt $(x_0,y_0) \in B_6(0)$ existiert, der $u(x_0,y_0) = -37$ genügt? Warum?

(c) Beschreiben Sie die Methode um die Poissonformel herzuleiten. Bestimmen Sie $u(0,0)$ mithilfe dieser Formel.

10.2. Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung Sei $a > 0$ und, wie üblich,

$$B_a(0) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < a^2\},$$

und seien

$$f : B_a(0) \to \mathbb{R}, \quad g : \partial B_a(0) \to \mathbb{R}$$

beliebige Funktionen. Mithilfe des Maximumprinzips zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f & \text{in } B_a(0) \\ u(x,y) = g & \text{auf } \partial B_a(0) \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung hat. *Hinweis:* Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des Problems. Welche Problem löst die Differenz $u_1 - u_2$?

10.3. Laplace-Gleicung auf das Rechteck I Sei $R := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ das Einheits-Viereck. Bestimmen Sie die Lösung $u : R \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } R \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{auf } \partial R, \end{cases}$$

wo

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ -\sin(2\pi y)\cos(2\pi y) & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist,}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} x(x-1) & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist.}$$

10.4. Laplace-Gleicung auf das Rechteck II (Prüfung Februar 2012) Sei $R := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ das Einheits-Viereck. Bestimmen Sie die Lösung $u : R \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } R \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{auf } \partial R, \end{cases}$$

wo

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ x^2 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist.}$$

 [$\star$] = schwer