11.1. Laplace-Gleichung auf den Kreis Lösen Sie die folgenden Probleme auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ für $u \in C^2(B_1(0), \mathbb{R})$. Schreiben Sie die Lösungen sowohl in kartesischen- als auch in Polarkoordinaten.

(a)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = (x^2+y^2)^2 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = 0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = y + x^2 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = 4x^3 - 3x & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

11.2. Berechnung von Fourier-Transformation Sei $a \neq 0$ gegeben. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktionen

$$g(t) = \mathrm{e}^{-a|t|} \quad \text{und} \quad h(t) = \operatorname{sign}(t)\mathrm{e}^{-a|t|},$$

wobei $\operatorname{sign}(t)$ die Signum-Funktion ist:

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0 \\ -1 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

11.3. Elementare Eigenschaften der Fourier-Transformation Wir wollen hier manche Eigenschaften der Fourie-Transformation beweisen. Seien f, g Funktionen in $L^1(\mathbb{R})$. [1]

(a) Linearität Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{F}[af + bg](\omega) = a\mathcal{F}[f](\omega) + b\mathcal{F}[g](\omega).$$

[1] Eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gehört zu $L^1(\mathbb{R})$ wenn $\int_{\mathbb{R}} |h| < +\infty$.

(b) Translation Sei $a \in \mathbb{R}$ und bezeichne $\tau_a f(t) = f(t-a)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{F}[\tau_a f](\omega) = \mathrm{e}^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega),$$
$$\tau_a \mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[\mathrm{e}^{iax} f(x)](\omega).$$

(c) Streckung Sei $\lambda > 0$. Bezeichne $\delta_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ und $\delta_{1/\lambda} f(x) = f(x/\lambda)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{F}[\delta_\lambda f](\omega) = \frac{1}{\lambda}\delta_{1/\lambda}\mathcal{F}[f](\omega),$$
$$\delta_\lambda \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}\left[\delta_{1/\lambda} f(x)\right](\omega).$$

(d) Ableitung Sei f so dass f' und $x\,f(x)$ auch in $L^1(\mathbb{R})$ sind. Beweisen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}[f](\omega) = (-i)\mathcal{F}\left[x f(x)\right](\omega),$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega).$$

(fakultativ) Sei jetzt $k \in \mathbb{N}_{>1}$ und f so dass $f', f'', \dots, f^{(k)}$ und $xf(x), x^2 f(x), \dots, x^k f(x)$ auch in $L^1(\mathbb{R})$ sind. Beweisen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\omega^k}\mathcal{F}[f](\omega) = (-i)^k\mathcal{F}\left[x^k f(x)\right](\omega),$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\right](\omega) = (i\omega)^k\mathcal{F}[f](\omega).$$

Hinweis zu (d): Benutzen Sie partielle Integration und die Tatsache dass, wenn h in $L^1(\mathbb{R})$ ist, $\lim_{R\to\pm\infty} h(R) = 0$ gilt.

11.4. Anwendungen der Fourier-Transformation

(a) Sei f eine unbekannte Funktion mit

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{3+4k^2}\,.$$

Bestimmen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\,.$$

(b) Zeigen Sie mithilfe der Fourier-Transformierten von $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, dass

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

11.5. Faltung und Fourier-Transformation Seien f und g in $L^1(\mathbb{R})$. Die *Faltung von f und g* ist definiert durch

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y.$$

Zeige, dass $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$.