Wir erinnern uns an das Gaussintegral:

$$\sqrt{\pi} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

12.1. Fourier-Transformation I

(a) Zeigen Sie, dass für $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f](-\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\right](\xi) = 2\pi e^{-a\xi^2}$$

gilt, wobei $a > 0$ eine positive Konstante ist.

(c) Für welche Wahl von a ist $e^{-a\xi^2}$ ein Eigenvektor für die Fouriertransformation, d.h. es gibt eine reelle Konstante λ, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = \lambda e^{-a\xi^2}?$$

(d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^{-ax^2}$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist, unter Verwendung der Fouriertransformierten von $g(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$.

12.2. Fourier-Transformation II Sei f eine unbekannte Funktion welche die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{3}{5 + i\xi} \tag{1}$$

besitzt. Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

12.3. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern I Sei $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben durch $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)K(x-y,t)\,\mathrm{d}y$, wobei K der Wärmeleitungskern ist und

$$f(x) = \begin{cases} T_1 & x \leq 0, \\ T_2 & x > 0, \end{cases}$$

wobei $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ bei festem $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\lim_{x\to+\infty} u(x,t)$ bei festem $t > 0$,

(c) $\lim_{x\to-\infty} u(x,t)$ bei festem $t > 0$.

Wenn u die Temperaturentwicklung in einem Stab ist, der zum Zeitpunkt $t = 0$ aus zwei Teilen mit konstanten Temperaturen T_1 und T_2 besteht, was bedeuten (a), (b) und (c)?

12.4. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern II Lösen sie das folgende Problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

in den Fälle

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$,

(b) $f(x) = \cos(x)$.

12.5. Fourier-Trasformation und Graphen (Prüfung August 2017) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (1-|x|^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, wobei:

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation.

(a) Berechnen Sie f' (welche ausserhalb der Punkte -1 und 1 definiert ist) und zeichnen Sie die Graphen von f und f'.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f')$.

(c) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f)$ *mithilfe von* (b).