Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Francesca Da Lio

9. August 2017

Mathematik III
Prüfung
D-CHEM

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Formelsammlung. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.
- Maximalpunktzahl: 45 Punkte.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[5]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[10]	
Total	[45]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. [**5 Punkte**] Seien a, b und g differenzierbare Funktionen mit $g > 0$.

Entscheiden Sie, ob die Folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ linear oder nichtlinear sind und bestimmen Sie die Ordnung; falls linear, entscheiden Sie, ob sie homogen oder nicht homogen sind. Im Fall einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung entscheiden Sie, ob die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $au_{xxx} + b(u^4 + u) = 0$

(b) $a^2 u_{xx} + u_x u_y = 1$

(c) $4u_{xx} + u_x + u_{xy} + 6u_{yy} = 0$

(d) $(x^2 - 2)u_{xx} + 4xyu_{xy} + (y^2 - 2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 16\}$.

Lösung.

(a) Nichtlinear, 3. Ordnung *(1 Punkt)*

(b) Nichtlinear, 2. Ordnung *(1 Punkt)*

(c) Linear, homogen, 2. Ordnung, elliptisch *(1 Punkt)*

(d) Linear, Nichtlinear, 2. Ordnung Die Determinante der betreffenden Matrix ist:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)(y^2 - 2) - 4x^2y^2 &= -2(x^2 + y^2) - 3x^2y^2 + 4 \\ &\leq -32 - 3x^2y^2 + 4 < 0 \quad \text{in } \Omega,\end{aligned}$$

somit ist die PDGl hyperbolisch. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2. [10 Punkte] Lösen Sie mit der Methode der Separation der Variablen das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 1 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \sin^2 x + \cos(3x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Lösung. Da die Gleichung nicht homogen ist, finden wir zuerst eine partikulare Lösung:

$$w_t - 3w_{xx} = 1.$$

(1 Punkt)

Mit dem Ansatz $w(x,t) = w(t)$, finden wir die partikuläre Lösung $u_p(t) = t$.

Die Funktion $v = u - u_p$ löst:

$$\begin{cases} v_t - 3v_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+, \\ v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) = \sin^2 x + \cos(3x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(2 Punkte)

Wir benutzen die Methode der Trennung der Variablen. Mit dem Ansatz $v(x,t) \stackrel{!}{=} X(x)T(t)$, wird die DGl:

$$\frac{T(t)}{3T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \qquad X'(0)T(t) = 0, \qquad X'(\pi)T(t) = 0.$$

(2 Punkte)

Insbesondere löst X:

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \quad x \in (0,\pi) \\ X'(0) = 0, \\ X'(\pi) = 0, \end{cases}$$

daher muss $k \leq 0$, $\sqrt{-k} \in \mathbb{N}$ und $X(x) = a\cos(\sqrt{-k}x)$ für $a \in \mathbb{R}$ sein.

Was T betrifft, es gilt:

$$T' = 3kT \quad \text{in } \mathbb{R}_+$$

somit muss T den Ausdruck $T(t) = c\mathrm{e}^{3kt}$ für $c \in \mathbb{R}$ haben. *(2 Punkte)*

Mit dem Superpositionsprinzip folgern wir, dass v als:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-3n^2 t} \cos(nx)$$

geschrieben werden kann, für geeignete $a_n \in \mathbb{R}$. Da $v(x,0) = \sin^2 x + \cos(3x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \cos(3x)$, finden wir, dass:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = 1.$$

und $a_n = 0$ für $n \neq 0, 2, 3$. *(2 Punkte)*

Daraus schliessen wir, dass die Lösung u des ursprünglichen Problems

$$u(x,t) = u_p(t) + v(x,t) = t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-12t}\cos(2x) + \mathrm{e}^{-27t}\cos(3x)$$

ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3. [10 Punkte]

(a) Finden Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung:

$$w_{tt} - 4w_{xx} = \sin x + \mathrm{e}^t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

(b) Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin x + \mathrm{e}^t & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\sin x + \cos x & t \in \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lösung.

(a) Aufgrund der rechten Seite der Gleichung, ist ein geeignete Ansatz $w(x,t) = w_1(t) + w_2(x)$. Wir berechnen:

$$w_{1,tt}(t) = \mathrm{e}^t \Rightarrow w_1(t) = \mathrm{e}^t, \qquad -4w_{2,xx}(x) = \sin x \Rightarrow w_2(x) = \frac{1}{4}\sin x;$$

eine partikuläre Lösung ist dann:

$$w(x,t) = \frac{1}{4}\sin x + \mathrm{e}^t.$$

(b) *Erste Möglichkeit.* Wir benutzen (a). Falls u eine Lösung des Problems ist, löst $v = u - w$ das Problem:

$$\begin{cases} v_{tt} - 4v_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v(x,0) = \cos x - 1 & t \in \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wir benützen die Formel von d'Alembert:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\cos(x+2t) - 1 + \cos(x-2t) - 1\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \xi \, \mathrm{d}\xi \\ &= -1 + \cos x \cos(2t) + xt. \end{aligned}$$

Wir schliessen, dass die Lösung des ursprünglichen Problem

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x,t) + v(x,t) \\ &= \frac{1}{4}\sin x + \mathrm{e}^t - 1 + \cos x \cos(2t) + xt. \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 4. [10 Punkte] Hier nennen wir $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixiert; betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f_\alpha(x) = \cos(\alpha x) \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

(a) Nehmen Sie für diese, *und nur für diese*, Teilaufgabe an, dass $\alpha = \frac{1}{\pi}$. Skizzieren Sie den Graph von f_α.

(b) Bestimmen Sie die komplexe und die reelle Fourier-Reihe von f_α. Konvergieren diese Reihen gegen die 2π-periodische Fortsetzung von f_α? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Mithilfe der folgenden elementaren Identitäten:

$$\cosh(x) = \cos(ix), \qquad \sinh(x) = \frac{\sin(ix)}{i},$$

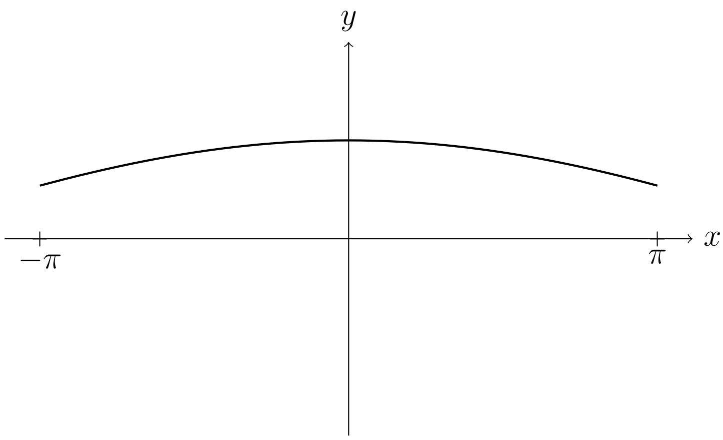
bestimmen Sie den Wert von:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Hinweis für (c): Betrachten Sie die reelle Fourier-Reihe von $f_\alpha(x)$ für geeignete $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) Der Graph is wie folgt:



(1 Punkt)

(b) Da f_α stetig und stückweise differenzierbar ist, konvergiert ihre Fourier-transformierte punktweise gegen die 2π-periodische Fortsetzung von f_α. *(1 Punkt)*

Was die komplexe Fourier-Reihe von f_α betrifft, ist der $n$te Fourier Koeffizient durch:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^{i\alpha x}+\mathrm{e}^{-i\alpha x})\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^{i(\alpha-n)x}+\mathrm{e}^{-i(\alpha+n)x})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(\alpha-n)x}}{i(\alpha-n)}-\frac{\mathrm{e}^{-i(\alpha+n)x}}{i(\alpha+n)}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{4\pi i}\frac{(e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi})(\alpha+n)-(\mathrm{e}^{-i\alpha\pi}-\mathrm{e}^{i\alpha\pi})(\alpha-n)}{\alpha^2-n^2} \\
&= \frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

gegeben. Folglich ist die komplexe Fourier-Reihe von f_α

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}\mathrm{e}^{inx}.$$

(2 Punkte)

Was die reelle Fourier-Reihe betrifft, weil f_α gerade ist, hat die Reihe nur Cosinus-Koeffizienten, die durch:

$$a_0 = c_0 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}, \qquad a_n = c_n + c_{-n} = 2\frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2},$$

gegeben sind. Deswegen ist die reelle Fourier-Reihe durch

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}\cos(nx).$$

gegeben. *(2 Punkte)*

(c) Um zu n^2+1 im Nenner zu erhalten, setzen wir $\alpha = 1$ in der reelle Fourier-Reihe ein:

$$f_i(x) = \frac{\sin(i\pi)}{i\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n i}{\pi}\frac{\sin(i\pi)}{-1-n^2}\cos(nx),$$

und mit den elementaren Identitäten können wir

$$\cosh x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\sinh \pi}{1+n^2} \cos(nx)$$

schreiben; zuletzt setzen wir $x = \pi$ ein um die gesuchte Summe zu bekommen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} - \frac{1}{2}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5. [10 Punkte] Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (1 - |x|^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, wobei:

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation.

(a) Berechnen Sie f' (welche ausserhalb der Punkte -1 und 1 definiert ist) und zeichnen Sie die Graphen von f und f'.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f')$.

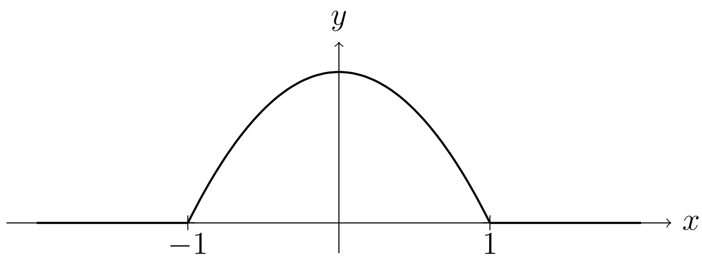
(c) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f)$ *mithilfe von* (b).

Solution.

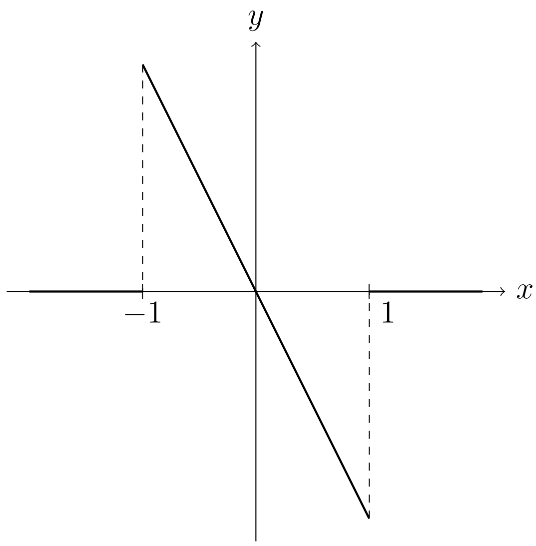
(a) Die Ableitung ist:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases}$$

Der Graph von f ist:



und der Graph von f' ist:



(2 Punkte)

(b) Durch partielle Integration berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} -2x\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2x\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{i\xi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{i\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{i\xi}(\mathrm{e}^{-i\xi} + \mathrm{e}^{i\xi}) - \frac{2}{i\xi}\left[\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{4}{i\xi}\cos\xi - \frac{2}{\xi^2}(\mathrm{e}^{-i\xi} - \mathrm{e}^{i\xi}) \\
&= 4i\left(\frac{\sin\xi}{\xi^2} - \frac{\cos\xi}{\xi}\right).
\end{aligned}$$

(5 Punkte)

Durch die Formel $\mathcal{F}[f'](\xi) = (i\xi)\mathcal{F}[f](\xi)$, und (b) folgern wir, dass:

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{i\xi}\mathcal{F}[f'](\xi) = 4\left(\frac{\sin\xi}{\xi^3} - \frac{\cos\xi}{\xi^2}\right).$$

(3 Punkte)