

Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Fourierreihe

Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = x + \cos(x), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

[6 Punkte]

2. Fouriertransformation

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (2 - x^2)^+ := \max(0, 2 - x^2)$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f .

[1 Punkt]

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f .

[5 Punkte]

3. Wellengleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem (Problem von Cauchy)

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 8x - 2x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 16 & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $u(11, 3)$ und $u(5, 2)$.

[3 Punkte]

b) Bestimmen Sie die Lösung im Bereich $\{(x, t) : x \geq t, t \geq 0\}$.

[5 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

4. Wärmeleitungsgleichung

Lösen Sie das folgende Problem

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - 12u_{xx}(x, t) &= 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\u_x(0, t) = u_x(\pi, t) &= 0, & t \geq 0 \\u(x, 0) &= 1 + \sin^4(x),\end{aligned}$$

mithilfe der Methode der Separation der Variablen.

[8 Punkte]

5. Laplacetransformation

a) Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation der Funktion

$$Y(s) = \frac{s + 7}{(s + 1)^2(s - 2)}.$$

[4 Punkte]

b) Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$, $t \geq 0$ der folgenden Differentialgleichung,

$$\begin{aligned}y'' + 2y' + y &= 9e^{2t} \\y(0) &= 0 \\y'(0) &= 1.\end{aligned}$$

[4 Punkte]

[Gesamtpunktzahl: 36 Punkte]