

Prüfung Mathematik III

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktezahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 DIN-A4-Seiten (10 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt und Formelsammlung;
- **keine** sonstige Literatur;
- **kein** Taschenrechner;
- **kein** Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Fourierreihe

Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$g(x) = f(x) + 4 \cos(7x), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

[5 Punkte]

2. Fouriertransformation

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \int_{-1}^1 e^{-|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f .

Hinweis: Schreiben Sie

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)h(y) dy,$$

wobei $g(z) = e^{-|z|}$ und

$$h(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq 1 \\ 0, & |z| > 1. \end{cases}$$

[7 Punkte]

3. Wärmeleitungsgleichung

Lösen Sie das folgende Problem

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos^4(2\pi x) & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

mithilfe der Methode der Separation der Variablen.

[8 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

4. Wellengleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem (Problem von Cauchy)

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 10x - x^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $u(2, 2)$ und $u(10, 1)$.

[3 Punkte]

b) Bestimmen Sie die Lösung im Bereich $\{(x, t) : x \geq t, t \geq 0\}$.

[5 Punkte]

5. Laplacetransformation

a) Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation der Funktion

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s + 13}{(s - 1)((s + 1)^2 + 4)}.$$

[4 Punkte]

b) Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$, $t \geq 0$ der Differentialgleichung

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 16e^t$$

zu den Anfangsdaten

$$y(0) = 2 \quad \text{und} \quad y'(0) = -1.$$

[4 Punkte]

[Gesamtpunktzahl: 36 Punkte]