ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Bemerkungen zu statistischen Tests

Einseitige vs. zweiseitige Tests

- Die Entscheidung für eine einseitige oder zweiseitige Alternative H_A hängt von der **Fragestellung** ab.
- Eine einseitige Alternative ist dann angebracht, wenn nur ein Unterschied in eine **bestimmte Richtung** von Bedeutung / Interesse ist
  (Bsp. **Überschreitung** Grenzwert).
- Der einseitige Test ist auf der einen (irrelevanten) Seite «blind», dafür verwirft er auf der anderen (relevanten) Seite früher als der zweiseitige Test (da der Verwerfungsbereich früher beginnt).
- Man sagt auch, dass er eine **grössere Macht** hat in diesem Bereich (siehe später).

p-Wert

- Zur Erinnerung: Test mittels Verwerfungsbereich:
  - Wir legen das Signifikanzniveau α im voraus fest.
  - Aus α und der Verteilung der Teststatistik unter H_0 berechnen wir den Verwerfungsbereich. Je kleiner (grösser) α, desto kleiner (grösser) ist der Verwerfungsbereich.
  - Beachte: Das Signifikanzniveau α und der Verwerfungsbereich sind fix und hängen nicht von den Daten ab. Die Teststatistik hängt von den Daten ab und ist eine Zufallsvariable.
  - Wir verwerfen H_0, falls der realisierte Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt.
- Alternativ: wir benutzen den p-Wert anstelle des Verwerfungsbereichs
- Definition des **p-Werts:** Der p-Wert eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, unter der Nullhypothese einen **mindestens so extremen Wert der Teststatistik** (bezüglich der Alternative) zu beobachten wie den aktuell beobachteten Wert.
- Bemerkung: Unter H_0 gilt $pWert \sim Unif(0,1)$.

Illustration p-Wert beim einseitigen t-Test («nach oben»)

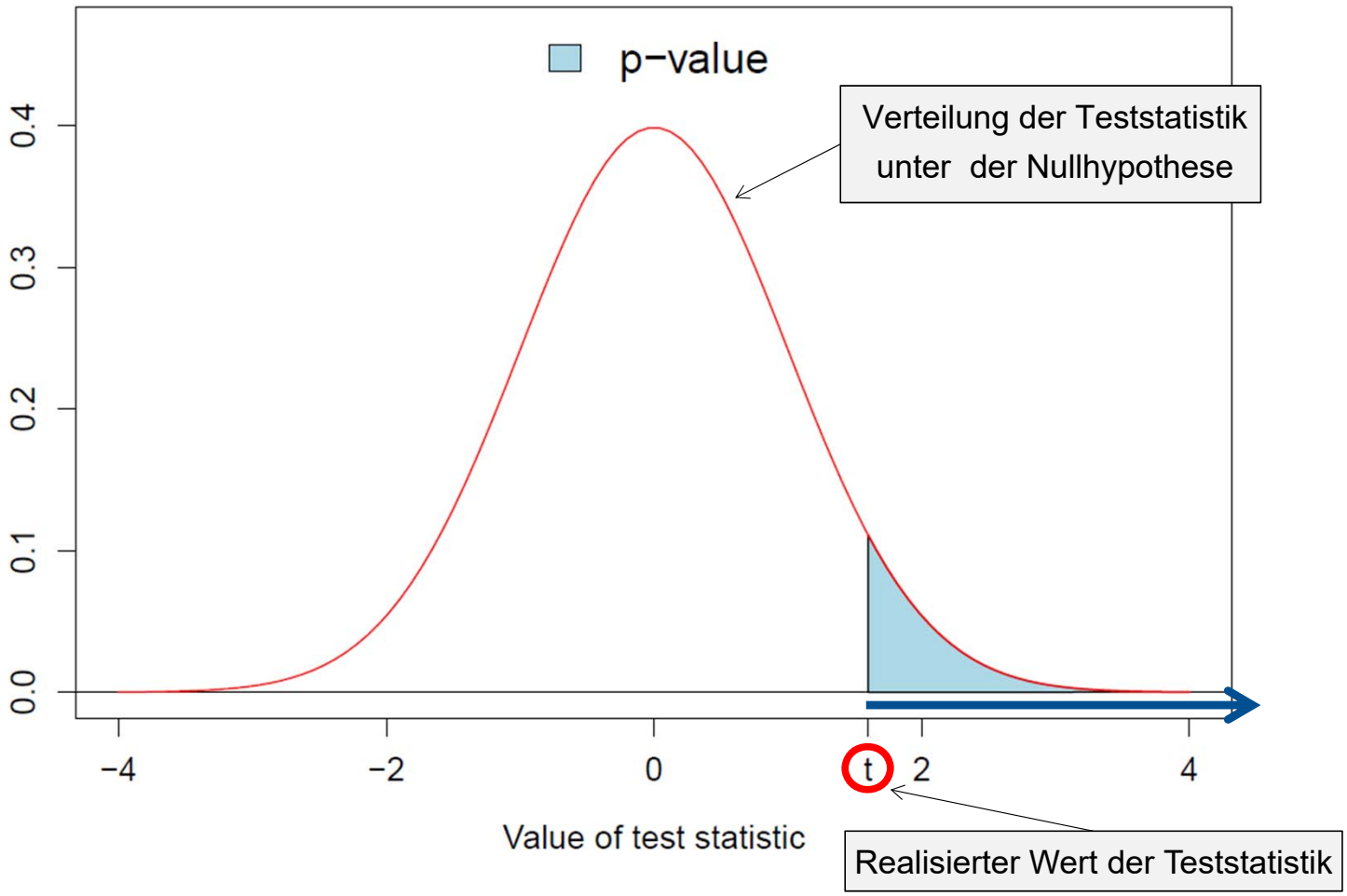


Illustration p-Wert beim einseitigen t-Test («nach unten»)

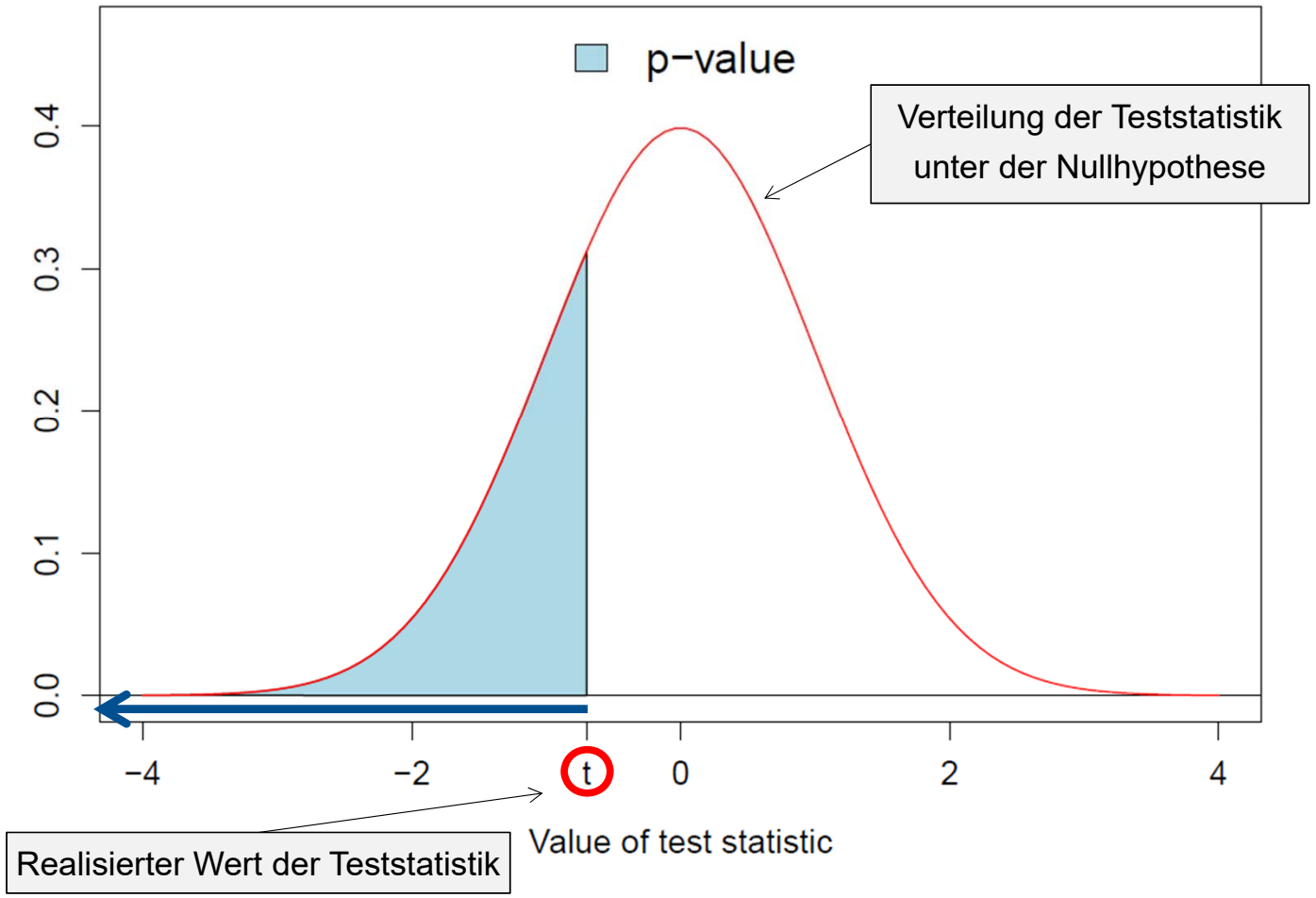
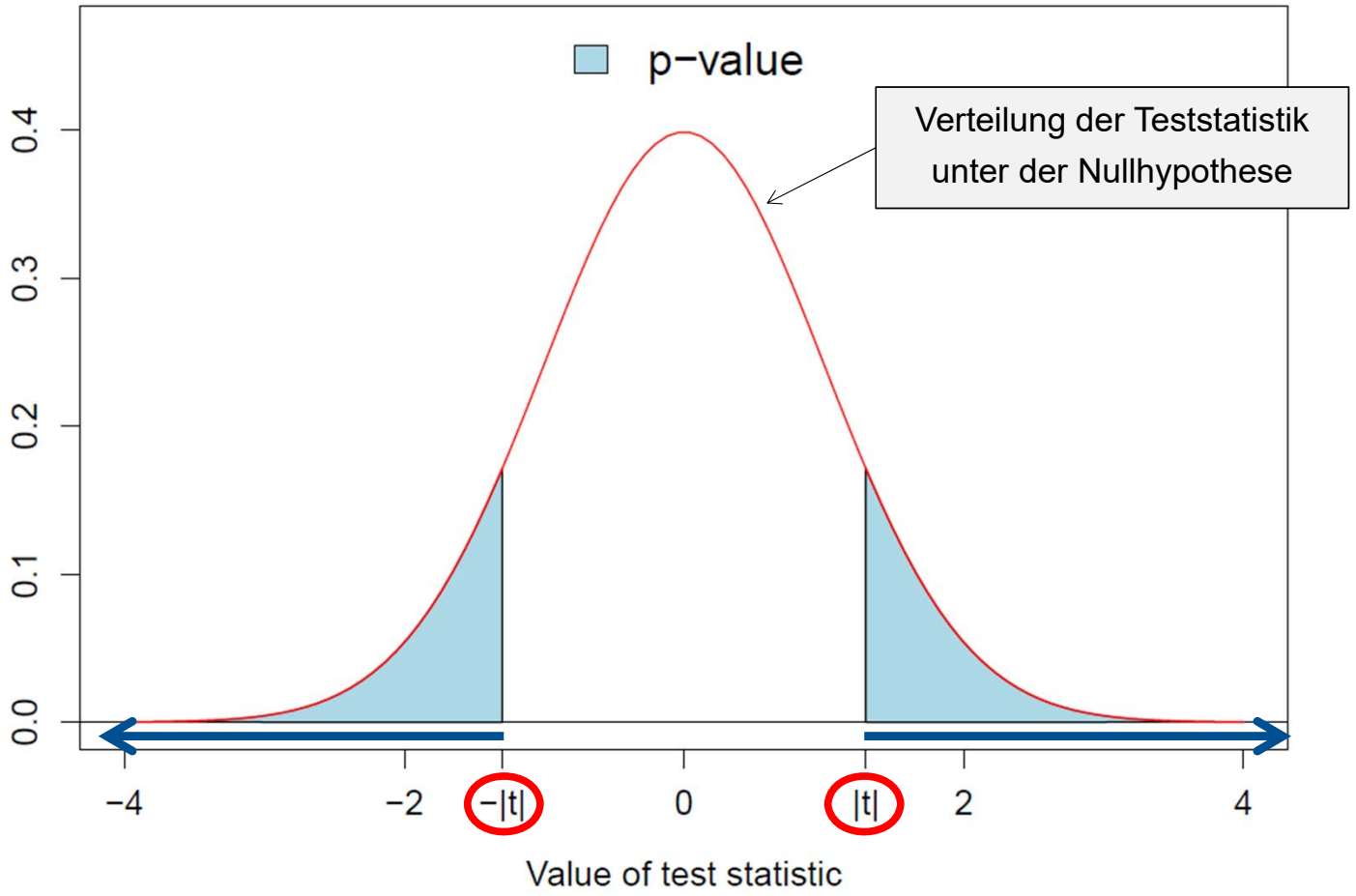


Illustration p-Wert beim zweiseitigen t-Test



p-Wert

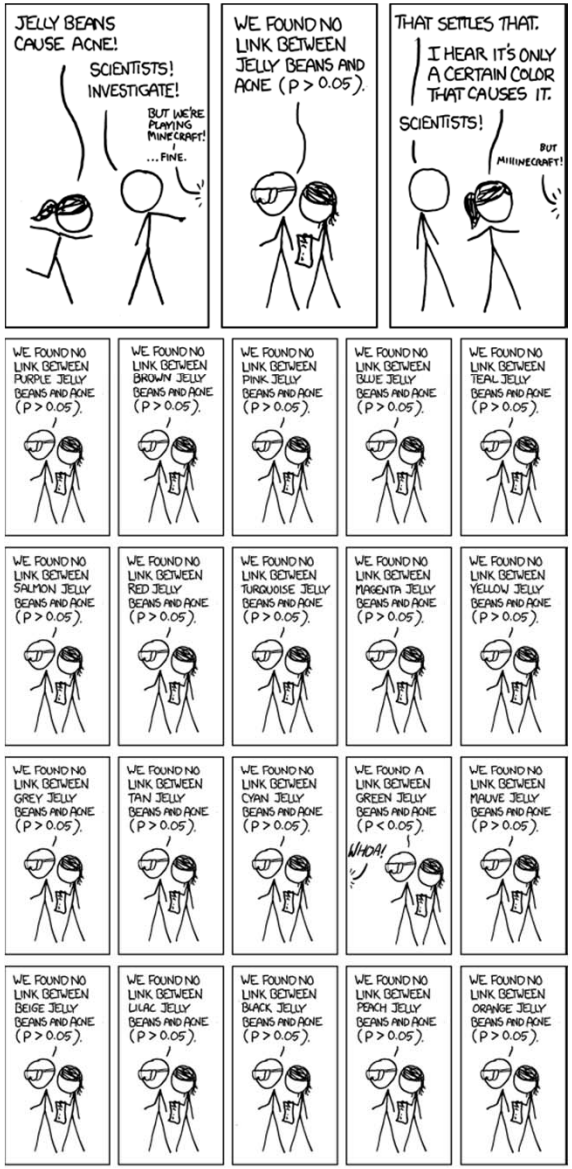
- Es gilt immer: $pWert \leq \alpha \Leftrightarrow Teststatistik\ im\ Verwerfungsbereich$

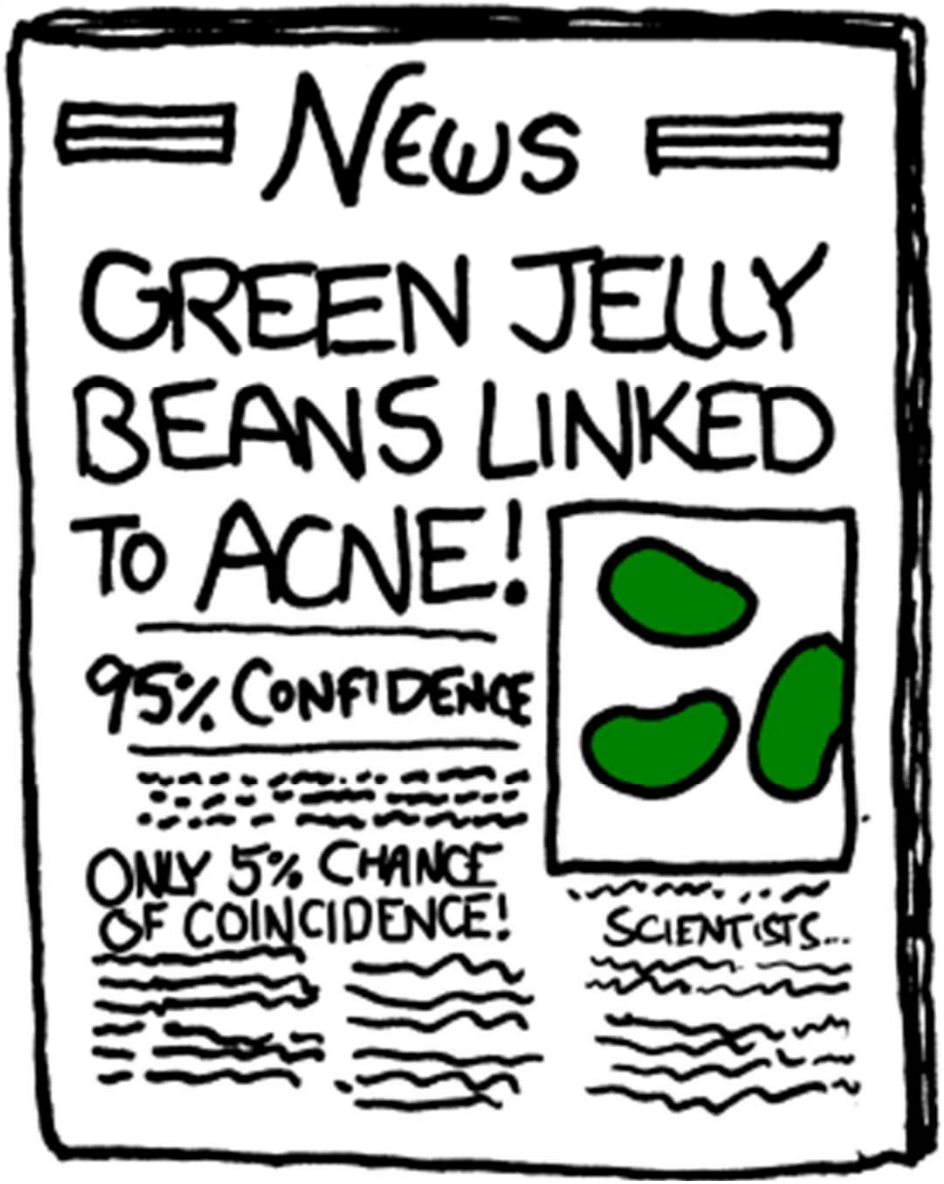
- Test mittels p-Wert:
  - Wir setzen das Signifikanzniveau α im voraus fest.
  - Wir berechnen den p-Wert.
  - Beachte: Das Signifikanzniveau α ist fix und hängt nicht von den Daten ab. Der p-Wert hängt von den Daten ab und ist also eine Zufallsvariable.
  - Wir verwerfen H_0, falls $pWert \leq \alpha$.

- Beachte: der p-Wert ist eine Wahrscheinlichkeit, **berechnet unter der Annahme, dass H_0 stimmt**. Er sagt also nichts über die Wahrscheinlichkeit, **ob** H_0 oder H_A stimmt. Insbesondere:
  - $pWert \neq P(H_0\ stimmt)$
  - $pWert \not\geq P(Fehler\ 1.\ Art)$

p-Wert: Nutzen / Gefahren

- Der p-Wert kann als «**standardisierte Teststatistik**» verwendet werden. Wir können am p-Wert **direkt** ablesen, ob die Nullhypothese verworfen wird.
- Einige «Gefahren» des p-Werts:
  - Ein kleiner p-Wert ist nicht automatisch fachlich relevant, denn der **p-Wert sagt nichts über die Effektgrösse**.
    ⇒ Berechne auch das Vertrauensintervall.
  - Multiples Testing / p-value Hacking: Falls H_0 gilt, dann erwartet man in $\alpha \times 100\%$ der Tests einen signifikanten p-Wert (i.e., $pWert \leq \alpha$). **Falls man also genügend viele Tests macht, dann findet man immer einen signifikanten p-Wert.** Die Garantie $P(Fehler\ 1.Art) \leq \alpha$ gilt nur für einen einzelnen Test!
    ⇒ Mache nur **einen** im voraus genau beschriebenen Test. Oder beschreibe, wieviele Tests gemacht wurden, und benutze multiple testing correction.
- Interessante Artikel:
  - http://www.nature.com/news/scientific-method-statistical-errors-1.14700
  - http://www.nature.com/news/statisticians-issue-warning-over-misuse-of-p-values-1.19503





Source:

https://xkcd.com/882/

Multiple testing correction

- Einfachste Methode: Bonferroni correction:
  - Wenn man K Tests macht, und man möchte

$$P(Fehler\ 1.Art\ in\ mindestens\ einem\ Test) \leq \alpha$$

    dann kann man jeden einzelnen Test zum Niveau α/K machen.
  - Beweis:

$$P(Fehler\ 1.Art\ in\ mindestens\ einem\ Test)$$

$$= P(\{Fehler\ 1.Art\ in\ Test\ 1\}\ or\ \ ...\ or\ \{Fehler\ 1.Art\ in\ Test\ K\})$$

$$= \sum_{j=1}^{K} P(Fehler\ 1.Art\ in\ Test\ j) \leq \sum_{j}^{K} \alpha/K = \alpha.$$

Macht

- Sei $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{H_A}$ und sei

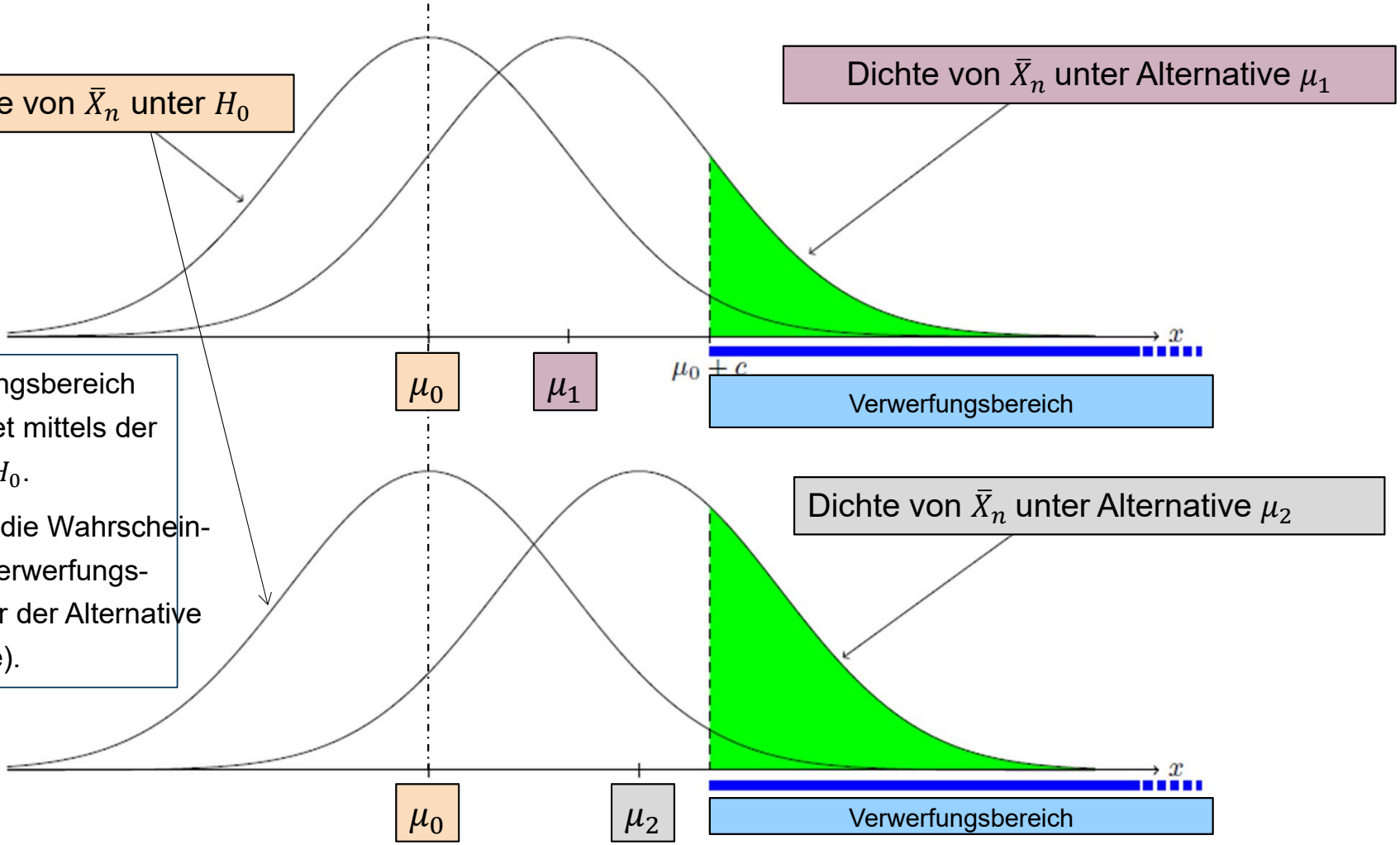
$$\beta(\theta) = P_\theta(Fehler\ 2.Art) = P_\theta(Test\ verwirft\ H_0\ nicht).$$

Die Macht eines Tests ist dann

$$\mathrm{P}_\theta(Test\ verwirft\ H_0) \;=\; 1 - P_\theta(Test\ verwirft\ H_0\ nicht) \;=\; 1 - \beta(\theta).$$

- Die Macht hängt also von θ ab.

Macht beim einseitigen Z-Test $(H_0: \mu = \mu_0, H_A: \mu > \mu_0)$



- Der Verwerfungsbereich wird berechnet mittels der Dichte unter H_0.
- Die Macht ist die Wahrscheinlichkeit des Verwerfungsbereichs unter der Alternative (grüne Fläche).

Bemerkungen zur Macht

- Je grösser der Unterschied zwischen μ_0 und μ_A, desto grösser wird die Macht.
- Je grösser die Stichprobe, desto grösser wird die Macht. Begründung: Weil $Var(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$, konzentrieren die Dichten sich mehr um μ_0 und μ_A.

- Die Macht ist wichtig zur Ermittlung der nötigen Stichprobengrösse.
  - Sie vermuten z.B. eine **bestimmte Abweichung** von der Nullhypothese (z.B. $\mu = 1$ statt $\mu = \mu_0 = 0$).
  - Sie planen ein Experiment und wollen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% die Nullhypothese verwerfen können (= Macht).
  - Man kann dann die **nötige Stichprobengrösse** n berechnen.