



Stetige Verteilungen

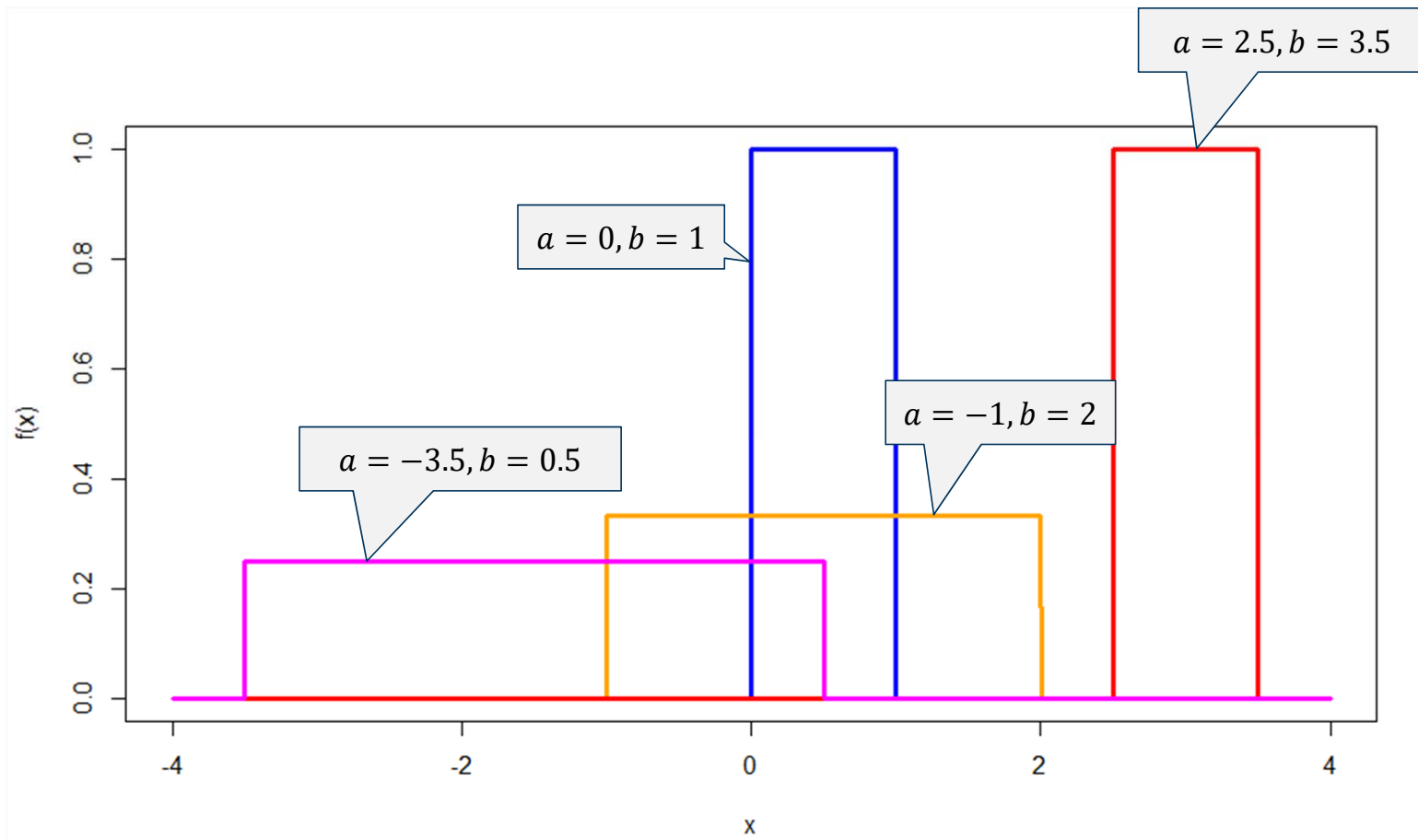
Vergleich der Konzepte (diskret vs. stetig)

	Diskret	Stetig
Wahrscheinlichkeitsfunktion / Dichte		
Kumulative Verteilungsfunktion	$F(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p(x_k)$	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$
Erwartungswert	$E[X] = \sum_{k \geq 1} x_k p(x_k)$	$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

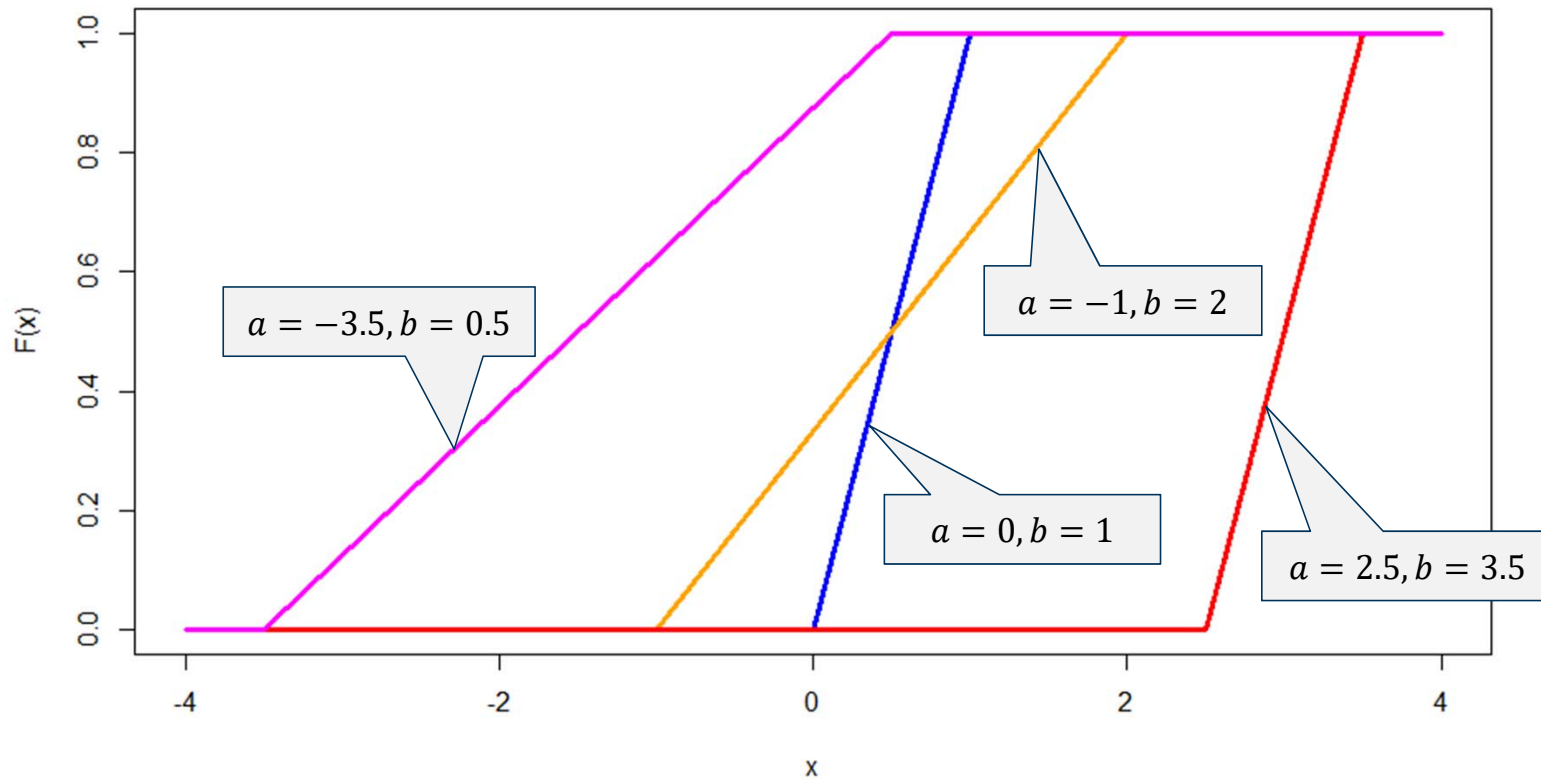
Uniforme Verteilung (Gleichverteilung): $X \sim \text{Uni}(a,b)$

- Wertebereich $W = [a, b]$
- Dichte $f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$
- Verteilungsfunktion $F(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]$
- Erwartungswert $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- Varianz $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Anwendung: Stetige Version des Laplace-Modells, “völlige Ignoranz”, bevorzugt keine Regionen in $[a,b]$, benutzt für Rundungsfehler

Uniforme Verteilung: Illustration Dichten



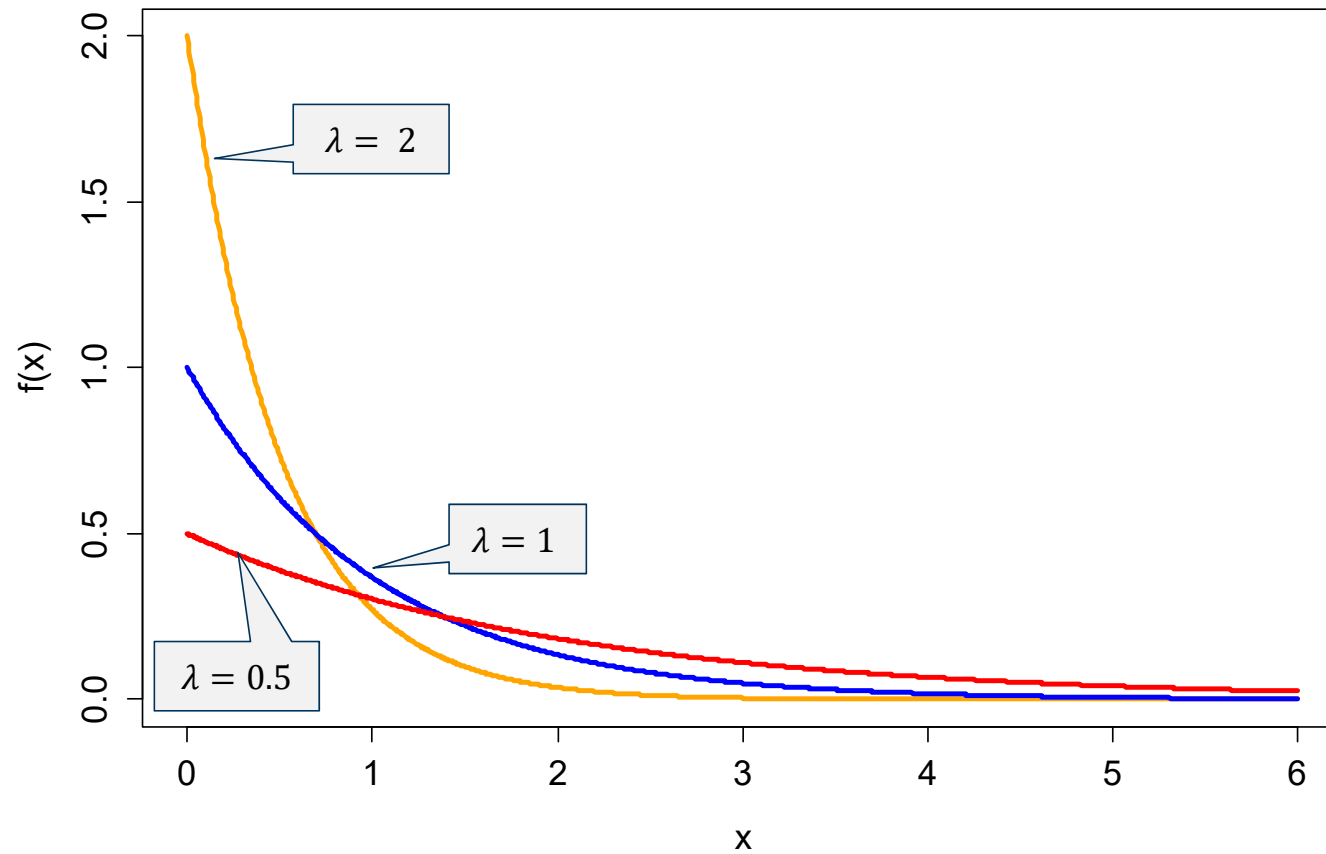
Uniforme Verteilung: Illustration kumulative Verteilungsfunktion



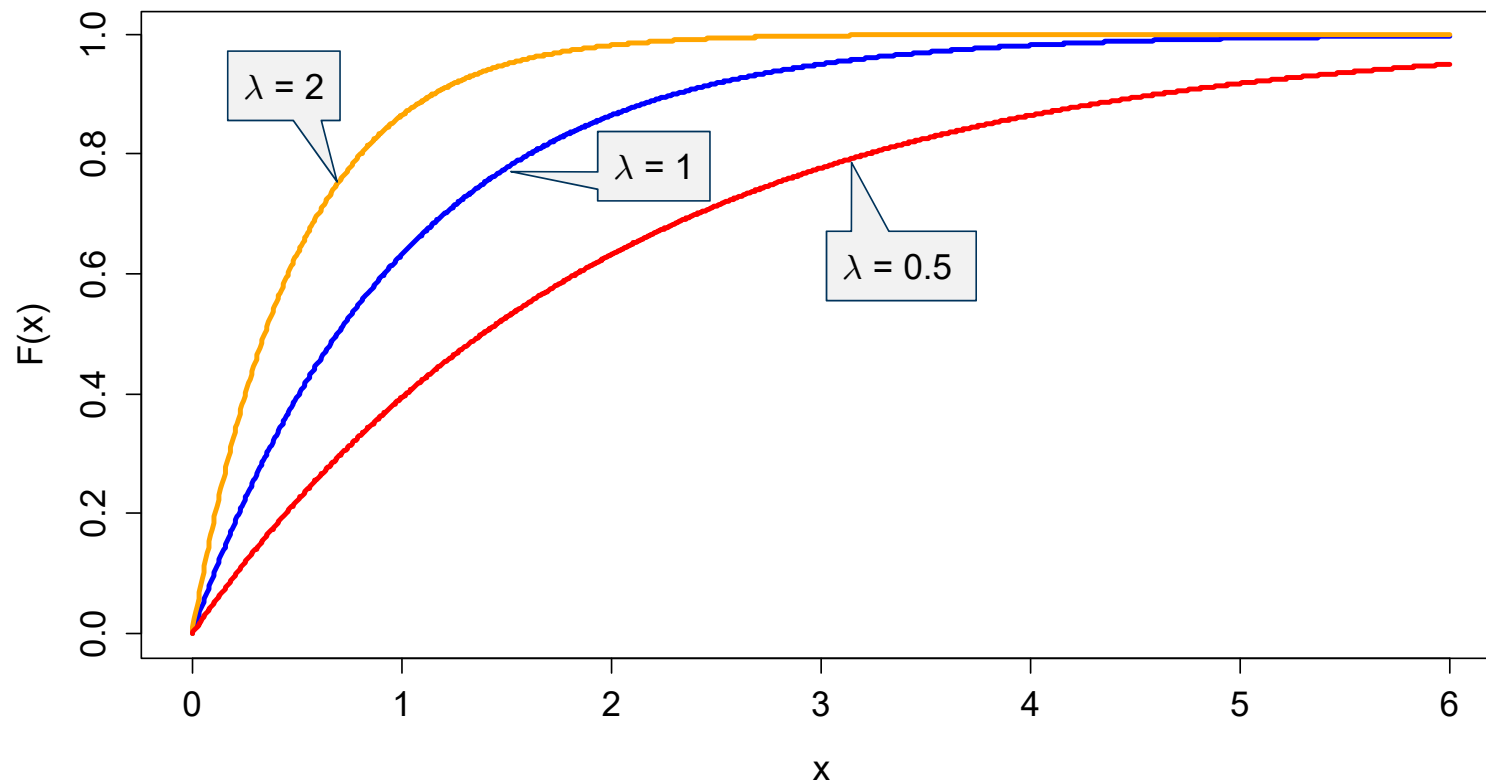
Exponentialverteilung: $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$

- Wertebereich: $W = [0, \infty)$
- Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$ und $f(x) = 0, x < 0$
- Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$ und $F(x) = 0, x < 0$
- Erwartungswert $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- Varianz $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Anwendung: Einfachstes Modell für Wartezeiten oder Lebenszeit technischer Systeme (ohne Alterungserscheinungen), stetige Version der geometrischen Verteilung.
- Bemerkung: Wenn Wartezeiten $\text{Exp}(\lambda)$ verteilt sind, dann hat die Anzahl der Ereignisse in einem Intervall der Länge t eine $\text{Pois}(\lambda t)$ -Verteilung.

Exponentialverteilung: Illustration Dichten



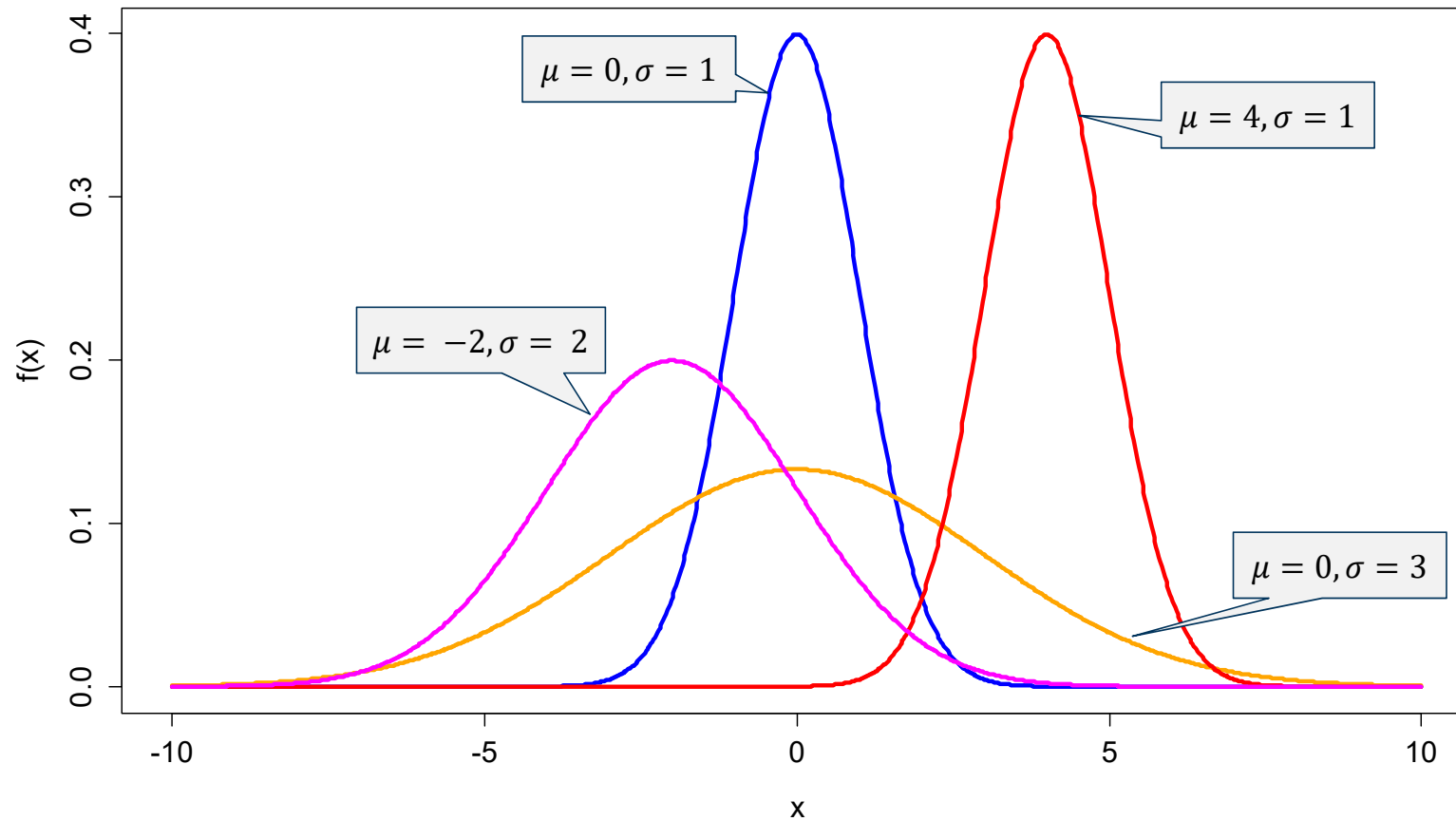
Exponentialverteilung: Illustration kum. Verteilungsfunktion



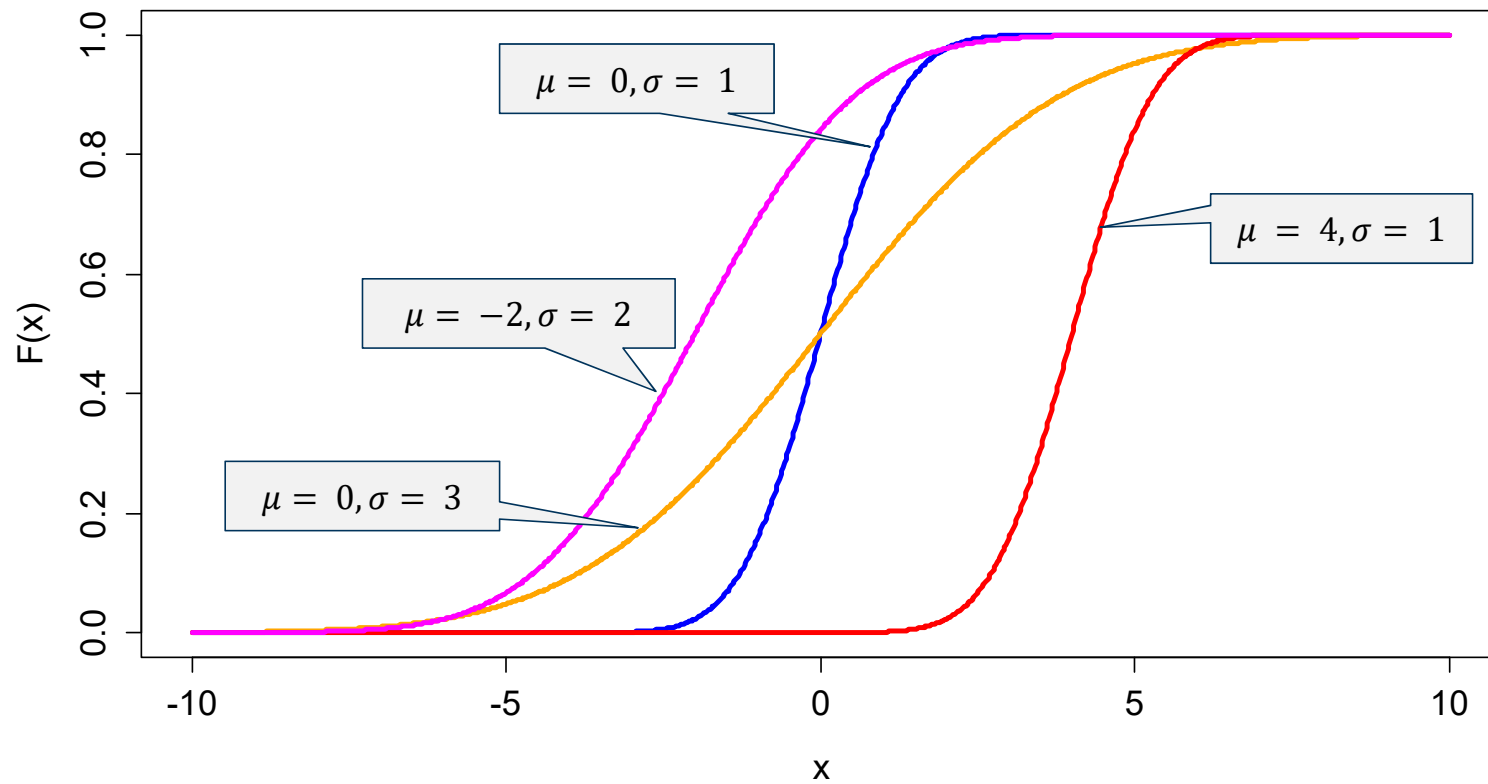
Normalverteilung (Gaussverteilung): $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- Wertebereich $W = (-\infty, \infty)$
- Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$
- Verteilungsfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)$ (kann man nicht geschlossen hinschreiben)
- Erwartungswert $E[X] = \mu$
- Varianz $Var(X) = \sigma^2$
- Anwendung Häufigste Verteilung für Messwerte, entsteht als Summe von vielen unabhängigen und gleichartigen Größen (zentraler Grenzwertsatz)

Normalverteilung: Illustration Dichten



Normalverteilung: Illustration kumulative Verteilungsfunktion



Normalverteilung, Schnellquiz

Es sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 9$.

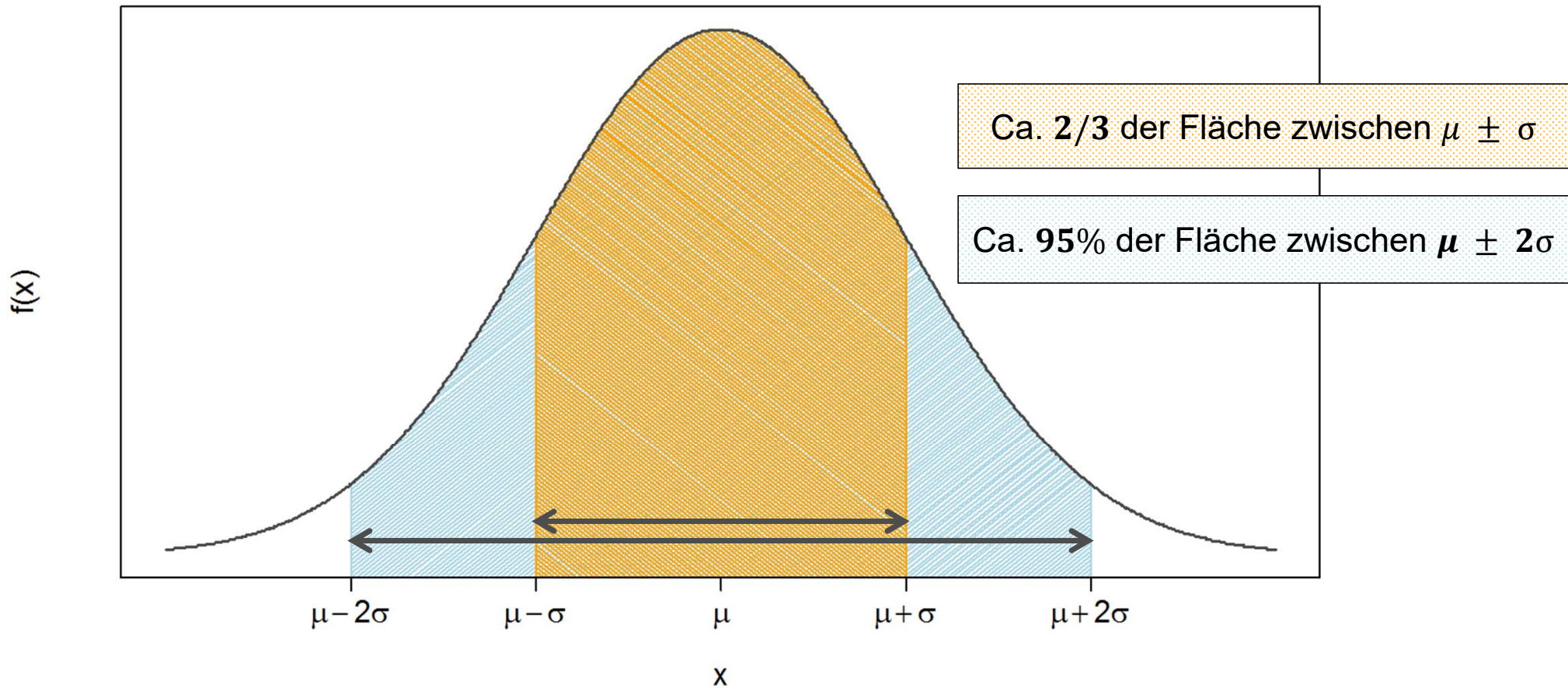
Betrachte die Aussagen

- a) Es ist $P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5]$.
- b) Es ist $P[X \geq 3] = P[X \leq 1]$.

Es ist

1. (a) Richtig / (b) Richtig
2. (a) Falsch / (b) Richtig
3. (a) Richtig / (b) Falsch
4. (a) Falsch / (b) Falsch
5. Keine Ahnung

Normalverteilung: Eigenschaften



Normalverteilung: Standardnormalverteilung

- Man spricht von der **Standardnormalverteilung**, falls $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$.
- Die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnet man mit $\varphi(x)$.
- Die kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet man mit $\Phi(x)$. Diese ist **nicht** geschlossen darstellbar (keine Formel).
→ **Tabelle** (siehe Beispiel)