Zentraler Grenzwertsatz: ergänzende Bemerkungen

Der zentrale Grenzwertsatz sagt zudem aus, dass

- **Binomialverteilung $\approx$ Normalverteilung für $\boldsymbol{n}$ gross** und p nicht zu klein (da die Binomialverteilung eine Summe von vielen Bernoulli-Verteilungen ist).
  (Für p klein und $\boldsymbol{n}$ gross kann die Poisson-Approximation besser sein.)

- **Poissonverteilung $\approx$ Normalverteilung für $\boldsymbol{\lambda}$ gross** (da die Poissonverteilung eine Summe von vielen anderen Poissonverteilungen ist).

Normalapproximation der Binomialverteilung

Wie geht man dann konkret vor?

Wenn $X \sim Bin(n, p)$, dann ist

$$E[X] = np, \ \ \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Als Approximation wählen wir eine Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ mit

$$\mu = np, \sigma^2 = np(1-p).$$

Also haben wir

$$P[X \leq x] \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Normalapproximation der Poissonverteilung

Wenn $X \sim Pois(\lambda)$, dann ist

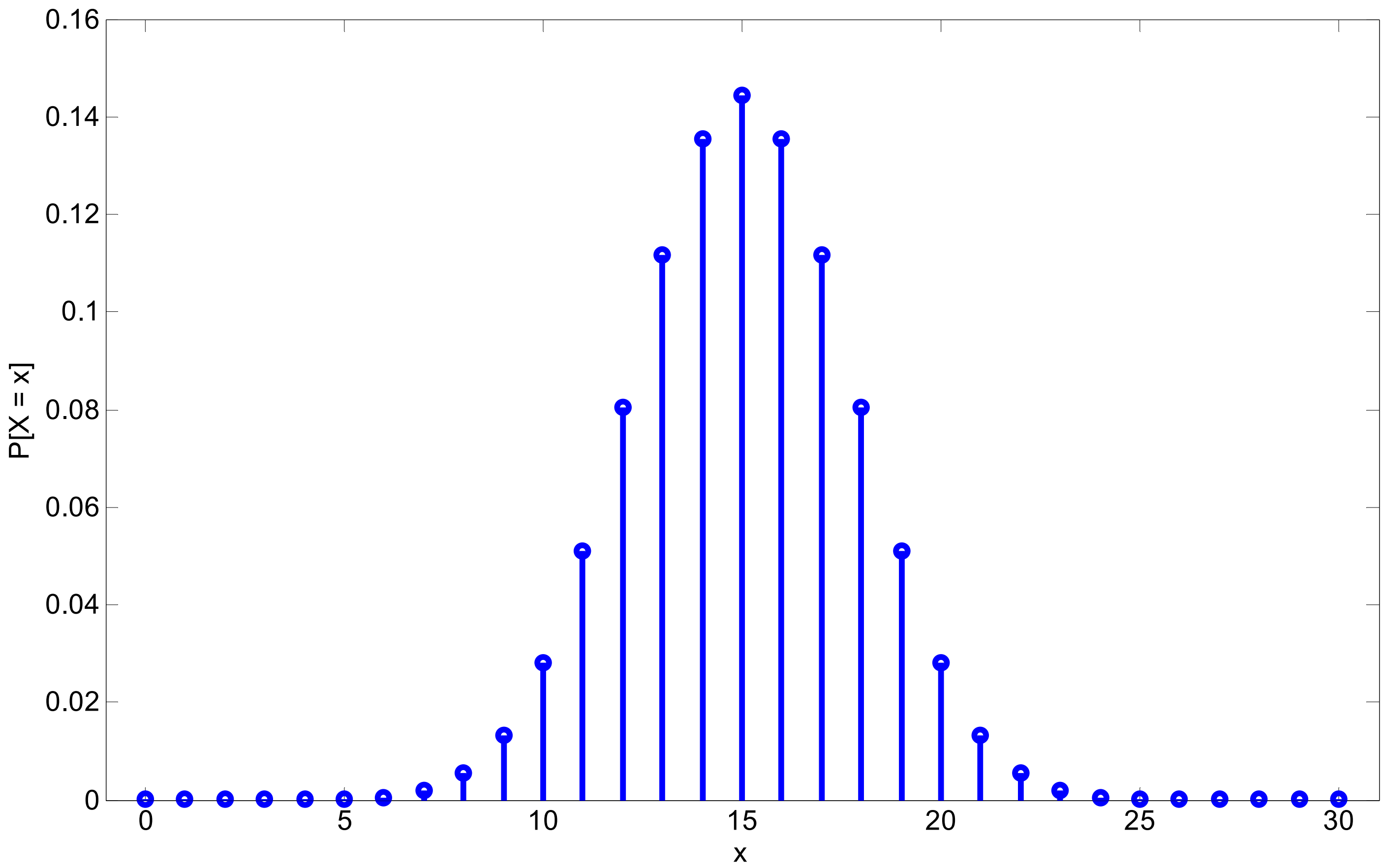
$$E[X] = \lambda, \quad Var(X) = \lambda.$$

Wir wählen also eine Normalverteilung mit $\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$.

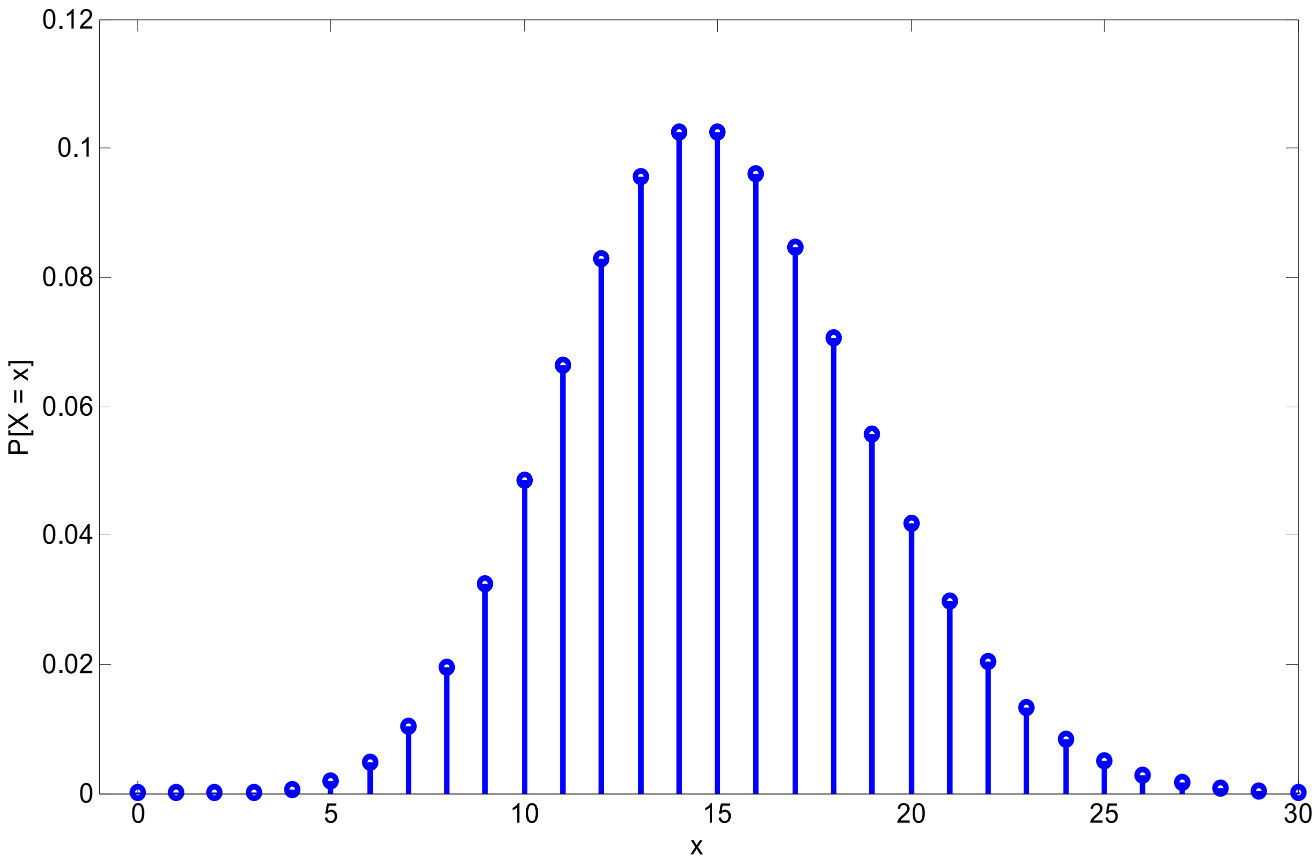
Also haben wir hier

$$P[X \leq x] \approx \Phi\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Binomialverteilung $(n = 30, p \ = \ 0.5)$



Poissonverteilung $(\lambda = 15)$



Frage: Produkt von Zufallsvariablen

- Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., wobei $X_i > 0$.

- Betrachte nun $Y = X_1 \cdots X_n$ (**Produkt**)

- Dann ist Y approximativ

1. normalverteilt
2. lognormal-verteilt
3. Poisson verteilt
4. anders verteilt
5. keine Ahnung