D-MATH/D-PHYS Lineare Algebra I HS 17
Dr. Meike Akveld

MC-Serie 6

Lineare Abbildungen, Quotientenräume

Einsendeschluss: 5.11.2017 23:59

1. Sei V ein Vektorraum, $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Seien $\{w_1, \ldots, w_m\}$ und $\{u_1, \ldots, u_l\}$ Basen von W_1 bzw. W_2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Sei $V = W_1 + W_2$. Dann ist $V/W_1 = \langle u_1 + W_1, \ldots, u_l + W_1 \rangle$.

Sei $v \in V$, dann ist

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_l u_l$$

Sei $v' := \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_l u_l$, dann ist

$$\begin{aligned} v + W_1 =& v' + W_1 = (\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_l u_l) + W_1 \\ =& \mu_1(u_1 + W_1) + \cdots + \mu_l(u_l + W_1) \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung.

√ (b) Sei $V = W_1 \oplus W_2$. Dann ist $\{w_1 + W_2, \ldots, w_m + W_2\} \subseteq V/W_2$ linear unabhängig.

Angenommen $\lambda_1(w_1 + W_2) + \cdots + \lambda_m(w_m + W_2) = 0_{V/W_2} = 0_V + W_2$, dann

$$\begin{aligned} 0_{V/W_2} =& \lambda_1(w_1 + W_2) + \cdots + \lambda_m(w_m + W_2) \\ =& (\underbrace{\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m}_{v}) + W_2 \end{aligned}$$

Da $0_V + W_2 = v + W_2$ und $0_V \in W_2$ existiert also ein $w \in W_2$ so dass $0_V = v + w$, bzw. $v = -w \in W_2$. Da $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, folgt $v = 0_V$ und da $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Also ist $\{w_1 + W_2, \ldots, w_m + W_2\}$ linear unabhängig.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

2. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen. Sei $W \subseteq \mathbb{F}_3^2$ der Unterraum $W = \langle (1,1) \rangle$. Dann hat $\mathbb{F}_3^2/W$ drei Elemente.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wegen der Dimensionsformel gilt

$$\dim(\mathbb{F}_3^2/W) = \dim \mathbb{F}_3^2 - \dim W = 2 - 1 = 1$$

Also besitzt $\mathbb{F}_3^2/W$ eine Basis $\{v\}$ bestehend aus einem Element, i.e. $\mathbb{F}_3^2/W = \langle v \rangle$. Sei $\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, dann ist $\langle v \rangle = \{\bar{0} \cdot v, \bar{1} \cdot v, \bar{2} \cdot v\}$. Da $\{v\}$ eine Basis ist, ist $v \neq 0_{\mathbb{F}_3^2}$, somit sind die $\{\bar{0} \cdot v, \bar{1} \cdot v, \bar{2} \cdot v\}$ paarweise verschieden und es folgt die Behauptung.

3. Sei V ein Vektorraum und sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist $\langle S \rangle$ der Durchschnitt aller Unterräume von V, die S enthalten.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei W der Durchschnitt aller Unterräume, die S enthalten. Dann ist W ein Unterraum, wie in der Vorlesung gezeigt wurde. Da S eine gemeinsame Teilmenge aller Unterräume ist, die zur Konstruktion von W verwendet werden, ist S eine Teilmenge von W. Wegen der in der Vorlesung gezeigten Minimalität des Erzeugnisses folgt $\langle S \rangle \subseteq W$. Andererseits ist $\langle S \rangle$ ein Unterraum von V, der S enthält. Insbesondere ist also nach Konstruktion $W \subseteq \langle S \rangle$. Dies beweist die Behauptung.

4. *Prüfung Winter 2017:* Sei W ein Unterraum eines Vektorraumes V und seien $v, v' \in V$ mit $v \neq v'$. Es ist möglich, dass die Nebenklasse $v + W$ in $v' + W$ enthalten ist.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Angenommen $W = V$, dann sind alle Nebenklassen identisch. Instruktiver sei $W \subseteq V$ nicht der Unterraum $\{0_V\}$, dann existiert ein $w \in W \setminus \{0_V\}$. Für beliebiges $v \in V$ gilt dann $v' = v + w \neq v$, aber $v + W = v' + W$.

5. *Prüfung Winter 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $W \subset V$ ein nicht-trivialer Unterraum. So ist

$$\dim(V/W) = \frac{\dim(V)}{\dim(W)}.$$

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die richtige Formel lautet

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

und wurde in der Vorlesung bewiesen. Insbesondere folgt im Beispiel des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}$, dass

$$0 = \dim(\mathbb{Q}) - \dim(\mathbb{Q}) = \dim(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \neq 1 = \frac{\dim(\mathbb{Q})}{\dim(\mathbb{Q})}$$

und folglich ist die Formel aus der Frage im Allgemeinen falsch.

Noch absurder wird die Aussage, wenn wir beispielsweise einen dreidimensionalen Unterraum W eines vierdimensionalen Vektoraumes V betrachten. Wäre die Formel wahr, dann besässe der Vektorraum V/W die Dimension $4/3$, was keine ganze Zahl ist.