D-MATH/D-PHYS — Lineare Algebra II — FS 17
Dr. Meike Akveld

MC-Serie 20

Selbstadjungierte Abbildungen & 1. Spektralsatz, orthogonale Abbildungen

Einsendeschluss: 08.04.2018 23:59

1. Sei V ein Euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\checkmark$ (a) Die Identität ist selbstadjungiert.

$\checkmark$ (b) Die Nullabbildung ist selbstadjungiert.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Es gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$\begin{aligned}\langle I_V v, w\rangle =& \langle v, w\rangle = \langle v, I_V w\rangle,\\ \langle 0_V v, w\rangle =& \langle 0, w\rangle = 0 = \langle v, 0\rangle = \langle v, 0_V w\rangle.\end{aligned}$$

Somit sind beide Abbildungen selbstadjungiert.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $T = T^*$. Dann ist T diagonalisierbar.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wir wissen aus Theorem 4, §5.1, dass T genau dann diagonalisierbar ist, wenn V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren besitzt. Des Weiteren wissen wir aus dem ersten Spektralsatz, das V eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren von T besitzt. Somit ist T diagonalisierbar.

3. Sei $Q \in O(n)$, dann ist Q diagonalisierbar.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Betrachte die Matrix $Q\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (Rotation um 90 Grad in der Ebene). Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist $X^2 + 1$ und besitzt keine Nullstellen in $\mathbb{R}$. Somit besitzt L_Q keine Eigenvektoren in $\mathbb{R}^2$ und insbesondere keine Basis bestehend aus Eigenvektoren. Also ist L_Q nicht diagonalisierbar und somit auch nicht Q.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine orthogonale Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Aussage stimmt, falls $\mathcal{B}$ eine Orthormalbasis ist, aber für allgemeine Basen ist die Aussage falsch. Wir illustrieren dies am Beispiel der Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch Rotation in der Ebene um 90 Grad. Wähle die nicht orthonormale Basis $\mathcal{B} = (e_1, e_1 + e_2)$ von $\mathbb{R}^2$. Dann ist $T(e_1) = e_2$ und $T(e_1 + e_2) = -e_1 + e_2$ und folglich

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{T}.$$

Falls $\mathcal{B}$ eine orthonormale Basis ist, dann gilt:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}} = I_n = [T^*T]_{\mathcal{B}} = [T^*]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} \overset{\mathcal{B}\ \text{ONB}}{=} [T]_{\mathcal{B}}^{T}[T]_{\mathcal{B}},$$

und folglich ist $[T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T]_{\mathcal{B}}^{T}$ und somit $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal.

5. Eine Isometrie auf einem Euklidischen Vektorraum ist eine Abbildung $T : V \to V$, sodass $\|Tv - Tw\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede Isometrie ist orthogonal.

$\checkmark$ (b) Jede orthogonale Abbildung ist eine Isometrie.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ und betrachte die Abbildung $T : w \mapsto v + w$, dann gilt sicher $\|T(v_1) - T(v_2)\| = \|v_1 - v_2\|$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und somit ist T eine Isometrie. Allerdings ist T nicht linear und insbesondere nicht orthogonal.
Falls T orthogonal ist, dann gilt per definitionem

$$\begin{aligned}
\|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \langle Tv_1 - Tv_2, Tv_1 - Tv_2 \rangle \\
&= \langle Tv_1, Tv_1 \rangle - 2\langle Tv_1, Tv_2 \rangle + \langle Tv_2, Tv_2 \rangle \\
&= \langle v_1, v_1 \rangle - 2\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle \\
&= \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = \|v_1 - v_2\|^2
\end{aligned}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und somit ist T eine Isometrie.

6. *Prüfung Winter 2018:* Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine selbstadjungierte Abbildung. So gilt $\dim \mathrm{Ker}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T^2)$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wir haben in einer Serie gezeigt, dass $\mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$ gilt. Insbesondere ist in diesem Fall also $\mathrm{Ker}(T^2) = \mathrm{Ker}(T)$ und die Aussage somit richtig. Um die Aussage aus der Serie zu beweisen, bemerken wir zuerst, dass $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^*T)$ gilt. Sei andererseits $w \in \mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T^*)$. Dann gilt insbesondere

$$0 = \langle T^*w, v\rangle = \langle w, Tv\rangle$$

für alle $v \in V$ und somit ist $w \in \mathrm{Im}(T)^\perp$. Da $\mathrm{Im}(T)^\perp \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$ ist, folgt $w = 0$. Dies zeigt, dass $Tv \in \mathrm{Ker}(T^*) \implies v \in \mathrm{Ker}(T)$ und somit ist $\mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$.

7. *Prüfung Winter 2018:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zwei selbstadjungierte Matrizen. Dann ist $AB - BA$ ebenfalls selbstadjungiert.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Es ist $(AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -(AB - BA)$ und somit ist $AB - BA$ genau dann selbstadjungiert, wenn A und B kommutieren. Es bleibt also zu zeigen, dass selbstadjungierte Matrizen A, B existieren, sodass $AB \neq BA$ ist. Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $BA = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Die Aussage ist also falsch.

8. *Prüfung Winter 2018:* Sei $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und $A = A^T$. Dann liegen alle Eigenwerte von A in $\{-1, 1\}$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wegen $A = A^T$ ist A nach dem 1. Spektralsatz reell diagonalisierbar. Sei λ ein Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\langle v, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle$$

und aus der Positivität des inneren Produktes folgt, dass $1 = \lambda^2$ gilt und somit ist $\lambda \in \{\pm 1\}$.

9. *Prüfung Winter 2018:* Jede orthogonale Abbildung ist diagonalisierbar.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Rotation in der reellen Ebene um den Ursprung um $\frac{\pi}{2}$ ist eine orthogonale Abbildung, die keinen Eigenvektor besitzt. Insbesondere ist sie nicht diagonalisierbar.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Seien S und T selbstadjungierte Abbildungen. Dann ist die Komposition ST selbstadjungiert.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Seien $S, T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ und seien A, B die Darstellungsmatrizen bezüglich der Standardbasis. Dann ist AB die Darstellungsmatrix von ST bezüglich der Standardbasis. S, T und ST sind genau dann selbstadjungiert, wenn $A = A^T$, $B = B^T$ und $AB = (AB)^T$ gelten. ST ist also genau dann selbstadungiert, wenn

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

gilt und also genau dann, wenn A und B kommutieren.

Ein Gegenbeispiel liefern die selbstadjungierten Abbildungen S, T mit Darstellungsmatrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, denn

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$