MC-Serie 21

Bilinearformen

Einsendeschluss: 15.04.2018 23:59

1. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ für einen Körper $\mathbb{K}$ und seien A, B kongruent. Dann gilt $\sigma(A) = \sigma(B)$.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Kongruenz impliziert nicht Ähnlichkeit, denn die Voraussetzung, dass A und B kongruent sind, besagt, dass ein $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = Q^T AQ$ ohne zu verlangen, dass Q orthogonal ist. Als Gegenbeispiel betrachten wir $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$, dann ist $Q^T = Q$ und folglich gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = Q^T Q,$$

sodass also $Q^T Q$ und I_2 kongruent sind. Es gilt $\sigma(A) = \{1, 4\} \neq \{1\} \neq \sigma(B)$.

2. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) > 1$ und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Dann existiert für jedes $u \in V$ ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $\beta(u, v) = 0$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Gegeben $u \in V$, dann ist die Abbildung $\beta_u : v \mapsto \beta(u, v)$ linear und folglich gilt

$$\mathrm{nullity}(\beta_u) = \dim(V) - \mathrm{Rang}(\beta_u) \geq \dim(V) - 1 > 0.$$

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$, dann existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[\beta]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x^T A y$ für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Man rechnet nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $\beta(x, x) = 0$, und somit wäre eine β darstellende Diagonalmatrix automatisch die Nullmatrix. Es ist aber $\beta\big((x_1, x_2), (x_2, -x_1)\big) = x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ wann immer $x_1 \neq 0$ und somit $\beta \not\equiv 0$. Also existiert keine β darstellende Diagonalmatrix.

4. Betrachte die Abbildung $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\beta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist β bilinear.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Im Allgemeinen ist die Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ multilinear in den Zeilen, und insbesondere ist die Determinante auf $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bilinear in den Zeilen. Somit ist $\beta \in \mathrm{BF}(\mathbb{R}^2)$.

5. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum und sei β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V. Dann ist jede Darstellungsmatrix von β invertierbar.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis und $[\beta]_\mathcal{B}$ die Darstellungsmatrix von β bezüglich $\mathcal{B}$. Dann gilt per definitionem

$$\forall u, v \in V : \beta(u, v) = [u]_\mathcal{B}^T [\beta]_\mathcal{B} [v]_\mathcal{B}.$$

Da β nicht-ausgeartet ist, existiert für jedes $u \in V \setminus \{0\}$ ein $v \in V$, sodass $\beta(u, v) \neq 0$. Insbesondere ist also $[u]_\mathcal{B}^T [\beta]_\mathcal{B} \neq 0$ für alle $u \in V \setminus \{0\}$ und somit auch $[\beta]_\mathcal{B}^T [u]_\mathcal{B}$. Da die Abbildung $u \mapsto [u]_\mathcal{B}$ ein Isomorphismus von V nach $\mathbb{F}_3$ ist, folgt $\mathrm{Ker}([\beta]_\mathcal{B}^T) = \{0\}$ und somit hat $L_{[\beta]_\mathcal{B}^T}$ nach der Dimensionsformel vollen Rang. Insbesondere ist $L_{[\beta]_\mathcal{B}^T}$ und somit auch $[\beta]_\mathcal{B}^T$ invertierbar. Es folgt $\det([\beta]_\mathcal{B}) = \det([\beta]_\mathcal{B}^T) \neq 0$ und somit ist $[\beta]_\mathcal{B}$ invertierbar.

6. *Prüfung Winter 2018:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei kongruente Matrizen. Dann haben A und B dieselben Eigenwerte.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Die Matrizen $A = I_2$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ sind kongruent. Es ist $\mathrm{char}_A(X) = (1 - X)^2$ und $\mathrm{char}_B(X) = X^2 - 3X + 1$ und somit besitzt $\mathrm{char}_B(X)$ die Nullstellen $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Insbesondere gilt also $\sigma(B) \neq \{1\} = \sigma(A)$.