D-MATH/D-PHYS | Lineare Algebra I/II | HS 2017/FS 2018
Dr. Meike Akveld

MC-Serie 27

Unitäre Vektorräume und normale Abbildungen

Einsendeschluss: 27.5.2018 23:59

1. Jede selbstadjungierte Abbildung ist normal.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Falls T selbstadjungiert ist, gilt $T^* = T$ und folglich

$$T^*T = TT = TT^*.$$

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Dann haben T und T^* dieselben Eigenwerte.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $L_A^* = L_{A^*}$, wann immer $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist. Für $n = 1$ und $A = (\mathrm{i})$ ist i der einzige Eigenwert von L_A und $-\mathrm{i}$ der einzige Eigenwert von L_A^*.

3. Jede selbstadjungierte Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum ist diagonalisierbar.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Im Falle eines Euklidischen Vektorraumes war dies der Inhalt des Spektralsatzes. Im Falle eines unitären Vektorraums ist dies ein Spezialfall der Tatsache, dass jede normale Abbildung diagonalisierbar ist.

4. Jede unitäre Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum ist normal.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Falls T unitär ist, dann gilt für alle $v, w \in V$

$$\langle T^*Tv, w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

da $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$. Umformuliert gilt also $\langle T^*Tv - v, w \rangle = 0$. Insbesondere ist $0 = \|T^*Tv - v\|$ für alle $v \in V$ und folglich ist $T^*T = I_V$. Das heisst, T besitzt eine Linksinverse und ist somit injektiv. Da der zugrundeliegende Vektorraum nach Voraussetzung endlichdimensional ist, ist T bijektiv. Die Automorphismen eines Vektorraumes bilden eine Gruppe, sodass $TT^* = I_V$ gilt (Linksinversen sind Rechtsinversen) und folglich ist $T^*T = TT^*$ und T also normal.

5. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ ein normaler Endomorphismus auf einem unitären vektorraum. Dann ist T^* normal.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Falls T normal ist, dann gilt $T^*T = TT^*$ und insbesondere

$$(T^*)^*T^* = TT^* = T^*T = T^*(T^*)^*,$$

wegen $(T^*)^* = T$. Letzteres folgt ähnlich wie im reellen Falle aus

$$\langle v, (T^*)^*w\rangle = \langle T^*v, w\rangle = \overline{\langle w, T^*w\rangle} = \overline{\langle Tw, v\rangle} = \langle v, Tw\rangle,$$

was für alle $v, w \in V$ gilt. Da die Gleichung $\langle v, (T^*)^*w\rangle = \langle T^*v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ die Adjungierte $(T^*)^*$ eindeutig bestimmt, folgt $T = (T^*)^*$.

6. Jede orthogonale Abbildung ist diagonalisierbar.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Wir erinnern daran, dass die Abbildung $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ orthogonal ist, aber keinen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$ besitzt, da das charakteristische Polynom $\operatorname{char}_A(X) = X^2 + 1$ keine reellen Nullstellen besitzt.

7. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum, und sei $T \in \operatorname{End}(V)$, sodass $\sigma(T) = \{1\}$, dann ist T orthogonal, bzw. unitär.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. $L_A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär bezüglich dem entsprechenden standard inneren Produkt, wenn A eine orthogonale bzw. eine unitäre Matrix ist. Es ist $A^TA = A^*A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \neq I_2$ und somit ist A weder orthogonal noch unitär.

8. Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

$\checkmark$ (a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$\checkmark$ (b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Im ersten Falle überprüft man

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = I_2,$$

also ist A unitär und insbesondere diagonalisierbar.

Im zweiten Falle überprüft man

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{i} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = 4I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{i} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = AA^*,$$

also ist A normal und insbesondere diagonalisierbar.

Im dritten Falle berechnet man das charakteristische Polynom als

$$\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

Die Matrix $A - 2I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -2 \end{smallmatrix}\right)$ hat Rang 1, und somit ist der Eigenraum zum Eigenwert 2 eindimensional. Insbesondere ist A nicht diagonalisierbar, sondern ähnlich zur Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ in Jordan Normalform.

9. *Prüfung Winter 2018:* Alle unitären Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Dies wurde in der Vorlesung bewiesen.

10. *Prüfung Winter 2018:* Jede normale Matrix ist entweder selbstadjungiert oder unitär.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat Determinante 2 und ist somit sicher nicht unitär. Es ist $A^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und somit ist A nicht selbstadjungiert. Die Formel für Inverse von 2×2-Matrizen impliziert $A^* = 2A^{-1}$, und folglich ist

$$A^*A = 2A^{-1}A = 2I_2 = 2AA^{-1} = AA^*$$

und A also ein Gegenbeispiel.

11. *Prüfung Sommer 2018:* Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass 1 der einzige Eigenwert von T ist. Dann ist T unitär.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist in Jordan Normalform und insbesondere nicht diagonal, also auch nicht diagonalisierbar. Somit ist A keine unitäre Matrix und somit $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ nicht unitär. Die Eigenwerte von L_A sind alle gleich 1.

12. *Prüfung Sommer 2017:* Jede diagonalisierbare Matrix ist normal.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nach Konstruktion diagonalisierbar. Sie ist aber nicht normal (bezüglich dem standard inneren Produkt), da die beiden eindimensionalen Eigenräume nach Konstruktion nicht orthogonal sind.

13. *Prüfung Sommer 2017:* Jede reelle normale Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist selbstadjungiert.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist orthogonal, aber nicht selbstadjungiert.

14. *Prüfung Sommer 2017:* Seien U eine unitäre und A eine invertierbare $n \times n$ Matrix, sodass AUA^{-1} diagonal ist. Dann ist A unitär.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Betrachte $U = I_n$ und A eine beliebige invertierbare Matrix. Dann ist $AUA^{-1} = I_n$ diagonal. Um die Aussage zu widerlegen, müssen wir eine invertierbare Matrix A finden, die nicht unitär ist. Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist invertierbar, aber nicht unitär, da sie einen Eigenwert von Absolutbetrag ungleich 1 besitzt.

15. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $Q \in O(n)$, dann ist Q über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wegen $Q \in O(n)$ gilt $Q^* = Q^{-1}$ und somit $QQ^* = Q^*Q$. Also ist Q normal und somit diagonalisierbar.