D-MATH/D-PHYS Lineare Algebra I/II HS 17/FS 18
Dr. Meike Akveld

MC-Serie 14

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einsendeschluss: 25.02.2018 23:59

1. Die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX = b$ für eine quadratische Matrix A und einen Vektor b sei $x = -b$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

√ (b) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 von A.

(c) $-b$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

(d) b ist kein Eigenvektor von A.

(e) $-b$ ist kein Eigenvektor von A.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

Aus $x = -b$ folgt $Ab = -Ax = -b$, folglich ist $0 = (A + I)(b)$ bzw. $b \in \mathrm{Ker}(L_{A+I})$ und wegen $b \neq 0$ ist somit b ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Also ist die zweite Aussage richtig, die vierte und die sechste somit falsch. Da $\mathrm{Ker}(L_{A+I})$ ein Unterraum ist, ist auch $-b \in \mathrm{Ker}(L_{A+I})$ und somit $-b$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Somit ist die fünfte Aussage falsch. Die erste und die dritte Aussage sind falsch, da der Eigenwert durch den Eigenvektor eindeutig bestimmt ist. Sei nämlich v ein Eigenvektor zu Eigenwerten λ_1, λ_2, dann ist $\lambda_1 v = Av = \lambda_2 v$, und da v ein Eigenvektor ist, folgt aus $v \neq 0$, dass

$$0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$$

und also $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) v_1 ist ein Eigenvektor von A.

$\surd$ (b) v_2 ist ein Eigenvektor von A.

(c) v_1 und v_2 sind beides Eigenvektoren von A.

(d) Weder v_1 noch v_2 ist ein Eigenvektor von A.

Man berechnet

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } Av_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist v_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 und v_1 kein Eigenvektor, da ansonsten $v_1 + v_2 = \lambda v_1$ impliziert, dass v_2 ein Vielfaches von v_1 wäre, was absurd ist.

3. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) v_1 ist ein Eigenvektor von A.

$\surd$ (b) v_2 ist ein Eigenvektor von A.

(c) v_1 und v_2 sind beides Eigenvektoren von A.

(d) Weder v_1 noch v_2 ist ein Eigenvektor von A.

Man berechnet

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } Av_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist v_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 und v_1 kein Eigenvektor, da ansonsten $v_1 + v_2 = \lambda v_1$ impliziert, dass v_2 ein Vielfaches von v_1 wäre, was absurd ist.

4. Es existiert eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$, die keine Eigenvektoren besitzt.

√ (a) richtig

(b) falsch

Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Angenommen $v = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = Av = \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

und folglich $\lambda x_1 = -x_2$ und $\lambda x_2 = x_1$. Falls $x_2 = 0$, dann ist auch $x_1 = 0$ wegen $x_1 = \lambda x_2$ und also v kein Eigenvektor. Also können wir annehmen, dass $x_2 \neq 0$. Es gilt $-x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_2$ und aus $x_2 \neq 0$ folgt $\lambda^2 = -1$ bzw. $\lambda \in \{\pm \mathrm{i}\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Bemerkung: Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $\overline{\mathbb{K}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{K}$, d.h. $\overline{\mathbb{K}}$ enthält $\mathbb{K}$ als Unterkörper und jedes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ besitzt eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{K}}$ (vgl. $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$). Dann besitzt jede quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ einen Eigenvektor in $M_{n\times n}(\overline{\mathbb{K}})$. Dies folgt aus der Existenz der Jordanschen Normalform, die im Verlaufe des Semesters besprochen wird.

5. Je zwei Eigenvektoren der gleichen Matrix sind linear unabhängig.

(a) richtig

√ (b) falsch

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $v \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von A, d.h. $v \in \mathrm{Ker}(L_{A-\lambda I})$. Insbesondere ist $\mathbb{K}v = \langle \{v\} \rangle \subseteq \mathrm{Ker}(L_{A-\lambda I})$. Falls $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ existiert ein $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so dass $\mu v \neq v$ und $\mu v \neq 0$. μv ist also ebenfalls ein Eigenvektor, und die Menge $\{v, \mu v\}$ ist linear abhängig.

6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Seien v_1, v_2 verschiedene Eigenvektoren von T, so ist ihre Summe ebenfalls ein Eigenvektor von T.

(a) richtig

√ (b) falsch

Antwort ist in der Sammlung falsch! Die Menge der Eigenvektoren ist kein Unterraum. Gegenbeispiel: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, dann sind e_1 und e_2 Eigenvektoren, aber $A(e_1 + e_2) = e_1 + 2e_2$. Angenommen $e_1 + e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, sprich $e_1 + 2e_2 = \lambda(e_1 + e_2)$, dann ist

$$0 = (1 - \lambda)e_1 + (2 - \lambda)e_2$$

und da e_1, e_2 linear unabhängig ist, gilt $1 - \lambda = 0$ und $2 - \lambda = 0$. Das ist absurd.

7. Ähnliche Matrizen haben die gleiche Eigenwerte.

√ (a) richtig

(b) falsch

Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ähnlich, d.h. es existiert $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, so dass $B = QAQ^{-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \det(Q)\det(A - \lambda I_n)\det(Q^{-1}) \\ &= \det(Q(A - \lambda I_n)Q^{-1}) \\ &= \det(QAQ^{-1} - \lambda Q I_n Q^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I_n) \end{aligned}$$

und es folgt

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \det(B - \lambda I_n) = 0.$$

Also sind die Eigenwerte von A und B gleich.

8. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt für alle $n \geq 1$?

(a) Wenn eine $n \times n$-Matrix nur zu sich selbst ähnlich ist, dann ist sie die Einheitsmatrix.

(b) Die reellen Matrizen $(i \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $((n-i) \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sind ähnlich.

(c) Zwei $n \times n$-Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

√ (d) Sind zwei $n \times n$-Matrizen A und B ähnlich, dann sind auch A^k und B^k ähnlich für alle $k \geq 0$.

(e) Keine der Aussagen ist richtig.

Aussage (a) ist falsch, denn auch die Nullmatrix ist nur zu sich selbst ähnlich.

In (b) sind beides Diagonalmatrizen; ihre Diagonaleinträge sind also ihre Eigenwerte. Für die erste Matrix sind dies $(i)_{1 \leq i \leq n} = (1, 2, \ldots, n)$; für die zweite $(n-i)_{1 \leq i \leq n} = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$. Also hat die zweite Matrix den Eigenwert 0, die erste aber nicht. Da ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte besitzen, sind die beiden Matrizen nicht ähnlich.

Aussage (c) ist falsch, denn zum Beispiel haben die beiden Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dasselbe charakteristische Polynom, sind aber nicht ähnlich, da die Nullmatrix nur zu sich selbst ähnlich ist.

Aussage (d) ist richtig: Aus $A = QBQ^{-1}$ für eine invertierbare Matrix Q folgt per Induktion $A^k = QB^kQ^{-1}$ für alle $k \geq 0$.

Die einzige richtige Aussage ist also (d).

9. Welche der folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$ haben nicht einen Eigenwert gleich 1?

(a) Rotation um die y-Achse mit Winkel $90°$.

(b) Reflexion an der x-Achse.

√ (c) Streckung um Faktor 2.

(d) Projektion bezüglich yz-Ebene.

(e) Reflexion an der xz-Ebene.

(f) Alle der oben aufgelisteten Endomorphismen haben einen Eigenwert gleich 1.

Rotation um die y-Achse ist eingeschränkt auf die y-Achse gleich der Identität. Folglich ist jeder von Null verschiedene Vektor auf der y-Achse ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Reflexion an der x-Achse ist eingeschränkt auf die x-Achse gleich der Identität. Folglich ist jeder von Null verschiedene Vektor auf der x-Achse ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Streckung um Faktor 2 ist gegeben durch $v \mapsto 2v$. Da $2 \neq 1$ in $\mathbb{R}$, existiert kein von Null verschiedener Vektor in $\mathbb{R}^3$ mit $2v = v$ und somit hat die Streckung um Faktor 2 keinen Eigenwert gleich 1.

Projektion bezüglich yz-Ebene ist eingeschränkt auf die yz-Ebene gleich der Identität. Folglich ist jeder von Null verschiedene Vektor in der yz-Ebene ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Reflexion an der xz-Ebene ist eingeschränkt auf die xz-Ebene gleich der Identität. Folglich ist jeder von Null verschiedene Vektor in der xz-Ebene eine Eigenvektor zum Eigenwert 1.