Dr. Meike Akveld

MC-Serie 12

Determinanten (Teil 1)

Einsendeschluss: 17.12.2017 23:59

1. Sei $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 8$.

Falsch, denn
$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2^2 \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2^2 \cdot 4 = 16.$$

√ (b) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 4$.

Richtig, denn
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 4.$$

√ (c) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = 4$.

Richtig, denn
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 4.$$

√ (d) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 12$.

Richtig, folgt aus der Multilinearität der Determinanten:
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1212$$

2. Sind die beiden Spalten einer 2×2 -Matrix A identisch, so gilt $\det(A) = 0$

√ (a) richtig

(b) falsch

Die beiden Spalten einer 2×2-Matrix A sind genau dann identisch, wenn die beiden Zeilen von A^T identisch sind. Also gilt $\det(A^T) = 0$. Und also

$$0 = \det(A^T) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \det(A)$$

3. Sei A eine reelle 2×2-Matrix, $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

(a) $\dim \operatorname{Ker} L_A = 2 - \det(A)$

Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\det(A) = 30$ aber $\dim \operatorname{Ker} L_A \neq -28$

√ (b) $\dim \operatorname{Ker} L_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 0$

Wir haben in dieser Serie gezeigt, dass $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist. Falls $\dim \operatorname{Ker} L_A > 0$, dann ist L_A nicht injektiv und also nicht invertierbar. Folglich ist A nicht invertierbar und somit ist $\det(A) = 0$.

(c) $\dim \operatorname{Ker} L_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 1$

Siehe oben.

√ (d) $\dim \operatorname{Ker} L_A = 2 - \operatorname{Rang} L_A$

Das ist die Dimensionsformel.

√ (e) $\dim \operatorname{Ker} L_A = 2 \Leftrightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Falls $\dim \operatorname{Ker} L_A = 2$, dann folgt aus der Dimensionsformel, dass $\operatorname{Rang} L_A = 0$. Folglich ist $\operatorname{Im} L_A = \{0\}$.

Sei zum Ziel des Widerspruchs $\operatorname{Im} L_A = \{0\}$ und $A \neq 0$, und seien $i, j \in \{1, 2\}$ mit $A_{ij} \neq 0$. Dann ist $(L_A e_j)_i = A_{ij} \neq 0$ und folglich $\operatorname{Im} L_A \neq \{0\}$. Widerspruch.

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die Abbildung $\det : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist linear.

(a) Richtig

$\checkmark$ (b) Falsch

Angenommen det ist linear, dann folgt

$$1 = \det(I_2) = \det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 0$$

Nach Axiom (K9) ist das ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

5. Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$ Vektoren mit Anfangspunkt im Ursprung, dann ist die Fläche des Parallelograms mit benachbarten Seiten u und v gegeben durch

$$\det\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

(a) Richtig

$\checkmark$ (b) Falsch

Die Fläche ist

$$\left|\det\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right|$$

6. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und seien zwei Zeilen von A identisch, dann ist $\det(A) = 0$.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das wurde in der Vorlesung bewiesen.

7. Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ erhalten aus $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mittels Vertauschung zweier Zeilen. Dann gilt $\det(B) = -\det(A)$.

√ (a) Richtig

(b) Falsch

Das wurde in der Vorlesung bewiesen.

8. Die Abbildung $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \delta(A) := 0$ ist eine Determinante.

(a) Richtig

√ (b) Falsch

Angenommen δ ist eine Determinante, dann ist nach Definition $\delta(I_n) = 1$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von δ.