D-MATH/D-PHYS Lineare Algebra I HS 17
Dr. Meike Akveld

MC-Serie 15

Ferienserie

Einsendeschluss: 30.01.2018 23:59

1. Sei f ein Polynom vom Grad n und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ so ist λf auch ein Polynom vom Grad n

√ (a) richtig

(b) falsch

Sei $n \geq 0$ und sei $f \in \mathbb{K}[X]$ gegeben durch $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist $\deg(f) = n$. Für $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt $\lambda f(X) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$ und aus $\lambda \neq 0$ und $a_n \neq 0$ folgt $\lambda a_n \neq 0$ und somit $\deg(\lambda f) = n$.

Falls $\deg(f) < 0$, dann ist $f = 0$ und $\deg(f) = -\infty$. Somit ist $\lambda f = 0$ und also $\deg(\lambda f) = -\infty$.

2. Gegeben seien die Vektoren $u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0)$ und $w = (0, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\{u, v, w, \}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Determinante 1 und ist somit eine Basiswechselmatrix.

3. Sei V ein Vektorraum, sei $S \subset V$. Wenn S den Nullvektor enthält, dann ist S linear abhängig

$\checkmark$ (a) richtig

(b) falsch

$0_V = 1 \cdot 0_V$ ist eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors mit Elementen in S.

4. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit mindestens drei Elementen ist linear abhängig.

$\checkmark$ (a) richtig

(b) falsch

Das ist ein Spezialfall eines Korollars aus der Vorlesung, denn $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

5. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ mit höchstens zwei Elementen ist linear unabhängig.

(a) richtig

$\checkmark$ (b) falsch

$\{(0,0,0)\}$ ist linear abhängig.

6. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum hat genau eine Basis.

(a) richtig

$\checkmark$ (b) falsch

$\{1\}$ und $\{-1\}$ sind verschiedene Basen von $\mathbb{Q}$.

7. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = m + n$

(a) richtig

$\checkmark$ (b) falsch

$\dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$ wurde in der Vorlesung bewiesen.

8. Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $T : V \to W$ eine Abbildung. Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine geordnete Basis von V. Wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$T(u_i + u_j) = T(u_i) + T(u_j),$$

dann ist T linear.

(a) richtig

√ (b) falsch

Betrachte die Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Basis (1). Diese Abbildung erfüllt die Bedingungen aus der Aufgabenstellung, aber es gilt $T(\frac{1}{2}) = 0 \neq \frac{1}{2} = \frac{1}{2}T(1)$.

9. Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\dim(V) < \dim(W)$. Dann ist f surjektiv.

(a) richtig

√ (b) falsch

Die Nullabbildung ist linear, aber in diesem Falle sicher nicht surjektiv.

10. Seien A, B Matrizen über $\mathbb{K}$, so dass $AB = I_n$. Dann sind A und B invertierbar.

(a) richtig

√ (b) falsch

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = A^T$, dann ist $AB = I_2$, aber A nicht-nvertierbar, da nicht-quadratisch.

11. Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ invertierbar, dann ist auch $A + A^{-1}$ invertierbar.

(a) richtig

√ (b) falsch

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Determinante 1 und ist also invertierbar. Man berechnet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $0 = A + A^{-1}$ nicht invertierbar.

12. Alle Einträge einer Elementarmatrix sind entweder 1 oder 0.

(a) richtig

√ (b) falsch

Siehe Definition

13. Die Transponierte einer Elementarmatrix ist eine Elementarmatrix

√ (a) richtig

(b) falsch

Das folgt aus der Definition.

14. Für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA)$.

(a) richtig

√ (b) falsch

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat Rang 1, aber $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat Rang 0.

15. Elementare Zeilenumformungen sind rangerhaltend

$\surd$ (a) richtig

(b) falsch

Der Zeilenraum ist nach Konstruktion invariant unter elementaren Zeilenumformungen.

16. Eine $n \times n$-Matrix mit Rang n ist invertierbar

$\surd$ (a) richtig

(b) falsch

Die Spalten enthalten eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Da die Matrix quadratisch ist, ist sie also eine Basiswechselmatrix und insbesondere invertierbar.

17. Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

Der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix kann grösser sein als der Rang der Koeffizientenmatrix, in welchem Fall keine Lösung existiert. Ein Beispiel ist das System $0x + 0y = 1$ mit einer Gleichung für zwei Unbekannten.

18. Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

Doch, der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix kann gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix sein. Ein Beispiel ist das System $x = 1, 2x = 2$ mit zwei Gleichungen für eine Unbekannte. Dieses System hat eine Lösung.

19. Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $u, v \in \mathbb{K}^m$ Vektoren. Angenommen die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = u$ und $Bx = v$ seien nicht-leer, dann ist auch die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(A + B)y = u + v$ nicht-leer.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

20. Sei $(A \mid b)$ in Zeilenstufenform, so hat das System $Ax = b$ eine Lösung.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

$(0 \mid 1) \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ ist in Zeilenstufenform, das Gleichungssystem $0 \cdot x = 1$ besitzt aber keine Lösung in $\mathbb{R}$.

21. Der Rang einer Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

Rang $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

22. Sind die beiden Zeilen einer 2×2-Matrix A identisch, so gilt $\det(A) = 0$

$\surd$ (a) richtig

(b) falsch

Identische Zeilen sind insbesondere linear abhängig.

23. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

24. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $\det(A) = 0$, dann sind die Zeilen $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ von A linear abhängig.

√ (a) richtig

(b) falsch

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rang} A < n$.

25. Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und sei A invertierbar, dann gilt $\det(A^{-1}B) = \frac{\det(B)}{\det(A)}$.

√ (a) richtig

(b) falsch

$$\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(B) = \det(A)^{-1}\det(B)$$

26. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

27. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, dann gilt $\det(A + A) = \det(A) + \det(A)$.

√ (a) richtig

(b) falsch

In $\mathbb{F}_2$ ist $x+x = 0$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$, also ist $A+A = 0$ und $\det(A)+\det(A) = 0$, folglich also $\det(A + A) = 0 = \det(A) + \det(A)$.

28. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, dann gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(a) richtig

√ (b) falsch

Gegenbeispiel: Sei $n = 2$ und seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $A+B = I_2$ und

$$\det(A+B) = \det(I_2) = 1 \not\equiv 0 = \det(A) + \det(B).$$

29. Sei A in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

30. Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$, dann ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$ genau dann, wenn $\det(A) = 1$.

√ (a) richtig

(b) falsch

In $\mathbb{F}_2$ gilt $\det(A) \neq 0 \iff \det(A) = 1$.