Dr. Meike Akveld

MC-Serie 16

Diagonalisierbarkeit

Einsendeschluss: 04.03.2018 23:59

1. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Angenommen T hat weniger als $\dim(V)$ verschiedene Eigenwerte, so ist T nicht diagonalisierbar.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

I_V ist sicherlich diagonalisierbar mit genau einem Eigenwert.

2. Wenn $3^{10} = 59049$ ist, was ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} ?$$

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 29524 & 29525 \\ 29525 & 29524 \end{smallmatrix}\right)$

√ (b) $\left(\begin{smallmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 59048 & 59050 \\ 59050 & 59048 \end{smallmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{smallmatrix} 59049 & 59050 \\ 59050 & 59049 \end{smallmatrix}\right)$

(e) Keine der obigen Matrizen

Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat die einfachen Eigenwerte 3 und -1 zu den jeweiligen Eigenvektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Matrix A ist daher diagonalisierbar und wir haben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A^{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{10}+1 & 3^{10}-1 \\ 3^{10}-1 & 3^{10}+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist Antwort (b) korrekt.

3. Eigenvektoren die zum gleichen Eigenwert gehören sind immer linear abhängig.

(a) richtig

√ (b) falsch

Die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ besteht aus Eigenvektoren der Identitätsmatrix, alle zum gleichen Eigenwert 1. Die Elemente der Standardbasis sind nicht linear abhängig.

4. Jeder diagonalisierbare Operator hat zumindest einen Eigenwert.

√ (a) richtig

(b) falsch

Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar, $\dim V = n$, und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, so dass $A := [T]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist. Per definitionem gilt

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{nj} \in \mathbb{K}$ gegeben durch

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} v_i.$$

Da aber A eine Diagonalmatrix ist, gilt $i \neq j \Rightarrow \lambda_{ij} = 0$ und folglich

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} v_i = \lambda_{jj} v_j.$$

Insbesondere ist v_j ein Eigenvektor und somit λ_{jj} ein Eigenwert von T.

5. Welche der folgenden vier Aussagen über die rationale Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist **nicht** korrekt?

(a) Die Matrix ist invertierbar.

(b) Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat algebraische Vielfachheit 2

(c) $(1, 1, 1)^T$ ist ein Eigenvektor von A.

(d) Die Matrix ist diagonalisierbar.

√ (e) Alle Aussagen sind korrekt.

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$P_A(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 4\,.$$

Insbesondere ist $\det(A) = 4 \neq 0$; also ist A invertierbar. Sodann hat P_A die Nullstelle $X = 1$, und durch Polynomdivision erhält man

$$P_A(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 4) = (X-1)^2(X-4).$$

Also ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2. Durch Einsetzen erhält man weiter, dass $(1, 1, 1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist. Um (d) zu überprüfen, bestimmt man den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$:

$$\mathrm{Kern}(A - I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\{(1, -1, 0)^T, (0, 1, -1)^T\}.$$

Also hat der Eigenwert die geometrische Vielfachheit 2. Somit existiert eine Basis aus Eigenvektoren, und A ist diagonalisierbar. Daher sind alle Aussagen korrekt, und die richtige Antwort ist (e).

6. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 10 & c \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$, so gilt

✓ (a) A und A^2 sind diagonalisierbar

(b) A ist diagonalisierbar aber A^2 nicht

(c) A und A^2 haben das gleiche charakteristische Polynom

(d) A^2 ist diagonalisierbar aber A nicht

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\mathrm{char}_A(X) = (1 - X)(10 - X)(100 - X)$$

und da die algebraischen Vielfachheiten alle gleich 1 sind, ist A diagonalisierbar. Die Korrektheit der Aussage (a) (und somit auch, dass (b) falsch ist) folgt aus der folgenden Tatsache: Gegeben eine diagonalisierbare Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist A^k diagonalisierbar für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Angenommen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist diagonalisierbar, bzw. dazu äquivalent: Es existiert eine Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, so dass $\Lambda := QAQ^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Da die Diagonalmatrizen ein Unterring von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist, ist also Λ^k eine Diagonalmatrix. Insbesondere ist also

$$QA^kQ^{-1} = (QAQ^{-1})^k = \Lambda^k$$

und damit A^k diagonalisierbar.

Da A diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $\{1, 10, 100\}$, folgt aus der im vorangehenden Beweis vorgenommenen Berechnung von A^2, dass A diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $\{1, 100, 10'000\}$. Insbesondere hat das charakteristische Polynom von A^2 die Nullstelle $10'000$, die keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist. Folglich gilt $\mathrm{char}_A(X) \neq \mathrm{char}_{A^2}(X)$ und Aussage (c) ist falsch.

Aussage (d) ist falsch, da Aussage (a) wahr ist.

7. *Prüfung Sommer 2017:* Eine lineare Abbildung T auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Die lineare Abbildung ist genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität übereinstimmen.

8. *Prüfung Sommer 2017:* Hat eine 3×3 Matrix A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachkeit 3, so gilt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Da A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 3 besitzt, ist A diagonalisierbar, d.h. insbesondere, dass eine invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ existiert, sodass $A = QDQ^{-1}$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge die Eigenwerte von A sind. Da A nur den Eigenwert λ besitzt, ist $D = \lambda I_3$. Es folgt

$$A = QDQ^{-1} = Q(\lambda I_n)Q^{-1} = \lambda QQ^{-1} = \lambda I_n.$$

9. *Prüfung Sommer 2017:* Die inverse Matrix einer invertierbaren diagonalisierbaren Matrix ist diagonalisierbar.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei A eine diagonalisierbare Matrix, d.h. $A = QDQ^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix ist und $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Es ist $\det(A) = \det(D)$ und da D eine Diagonalmatrix ist, folgt aus $\det(A) \neq 0$, dass alle Diagonaleinträge von D von 0 verschieden sind. Sei $\tilde{D}$ die Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge die multiplikativen Inversen der Diagonaleinträge von D sind. Es gilt $\tilde{D} = D^{-1}$ und folglich

$$A(Q\tilde{D}Q^{-1}) = QDQ^{-1}Q\tilde{D}Q = QD\tilde{D}Q^{-1} = QQ^{-1} = I_n,$$

somit ist $Q\tilde{D}Q^{-1}$ eine Inverse von A, die nach Konstruktion diagonalisierbar ist. Aus der Eindeutigkeit der Inversen folgt die Diagonalisierbarkeit der Inversen von A.

10. *Wiederholungsprüfung Winter 2018:* Jede reelle 2018×2018 Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Sei $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Rotation um $\frac{\pi}{2}$, dann hat A keinen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$ und insbesondere also keinen reellen Eigenwert. Die Blockdiagonalmatrix $B \in M_{2008\times 2008}(\mathbb{R})$ mit 1009 Kopien von A auf der Diagonalen hat das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_B(X) = \mathrm{char}_A(X)^{1009}$ und somit hat B keinen reellen Eigenwert.

11. *Wiederholungsprüfung Winter 2018:* Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Sei $A = QBQ^{-1}$ für $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann ist v ein Eigenvektor von B genau dann, wenn Qv ein Eigenvektor von A ist. Dies liefert das gewünschte Gegenbeispiel. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist v genau dann ein Eigenvektor von A, wenn $v \in (\mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2) \setminus \{0\}$. Sei Q die Rotation in der reellen Ebene um $\frac{\pi}{4}$ um den Ursprung, und sei $B = Q^{-1}AQ$. Ein Vektor v ist also ein Eigenvektor von B genau dann, wenn Qv ein Eigenvektor von A ist, also genau dann wenn $v \in \big(\mathbb{R}(e_1 - e_2) \cup \mathbb{R}(e_1 + e_2)\big) \setminus \{0\}$ ist. Insbesondere sind alle Eigenvektoren von B keine Eigenvektoren von A.