D-MATH/D-PHYS Lineare Algebra I HS 17
Dr. Meike Akveld

MC-Serie 13

Determinanten (Teil 2)

Einsendeschluss: 24.12.2017 23:59

1. Für welche Werte von a besitzt das folgende Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung in $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} ax + \ \ y \qquad &= 0 \\ -x + ay - 2z &= 0 \\ x \qquad + \ \ z &= 0 \end{aligned}$$

(a) $a = 0$

√ (b) $a = 1$

(c) $a = 2$

(d) $a = \sqrt{2}$

Sei $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ die zum LGS gehörige Koeffizientenmatrix. Das homogene LGS besitzt genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $\mathrm{nullity}(L_A) > 0$ oder (für quadratische Matrizen) dazu äquivalent $\det(A) = 0$. Es gilt $\det(A) = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ und somit besitzt das Gleichungssystem genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $a \in \{\pm 1\}$.

2. Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 4

√ (e) 8

Wir entwickeln nach der ersten Spalte und berechnen

$$\begin{aligned}
\det(A) =& 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
=& 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
& + 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) * \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} \\
=& 1 * \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} - (-1) * \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + 1 * \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} - (-1) * \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} \\
& + 1 * \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} - (-1) * \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} = 8
\end{aligned}$$

3. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen A und B aus $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $n \geq 2$ korrekt?

$\checkmark$ (a) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Richtig. Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

$\checkmark$ (b) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $A^{(1)}, \cdots, A^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.

Richtig, denn $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rang} A = n$.

$\checkmark$ (c) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

Richtig, da

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$$

(d) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

Falsch, betrachte zum Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für $A \in M(n \times n, K)$:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

(e) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Gegenbeispiel: Seien $A = B = I_n$. Dann ist (wegen $n \neq 1$)

$$\det(A + B) = \det(2I_n) = 2^n \neq 2 = \det(I_n) + \det(I_n) = \det(A) + \det(B)$$

4. Welche der folgenden Aussagen über 3×3-Matrizen ist falsch?

(a) Die Determinante ist invariant unter Transposition.

$\surd$ (b) Die Determinante des λ-fachen einer Matrix ist das λ-fache der Determinante der Matrix.

(c) Nach Vertauschung der ersten und dritten Spalte einer Matrix wechselt das Vorzeichen der Determinante.

(d) Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten Zeile lässt die Determinante unverändert.

(e) Nach Ersetzen der ersten Spalte durch die zweite wird die Determinante 0.

Aus der Multilinearität folgt $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$. Die anderen Aussagen sind wahr. $\det(A) = \det(A^T)$ wurde in der Vorlesung gezeigt, ebenso die dritte und vierte Aussage. Die letzte Aussage folgt aus der ersten Aussage und der Tatsache, dass die Determinante eine alternierende Abbildung ist.

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$$

√ (a) $x = 0$

(b) $x = 1$

√ (c) $x = 2$

(d) Keiner der obigen Vorschläge ist richtig.

Man berechnet

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1 * \underbrace{\det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}}_{=x^2-1} - 1 * \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}}_{=x-1} + 1 * \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}}_{=1-x} = x^2 - 2x + 1$$

Es ist $x^2 - 2x + 1 = 1$ genau dann, wenn $0 = x^2 - 2x = x(x-2)$.

6. *Prüfung Winter 2017:* Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\det(A^T) = -\det(A)$.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Es ist $I_n = I_n^T$, folglich ist $-\det(I_n) = -1 \neq 1 = \det(I_n^T)$.

7. *Prüfung Winter 2017:* Sei E eine Elementarmatrix, so gilt $\det(E) = \pm 1$.

(a) Richtig

√ (b) Falsch

Sei $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Elementarmatrix vom Typ II: Multiplikation von Zeile 1 mit $2 \in \mathbb{R}$, dann ist E eine Blockdiagonalmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$, und folglich ist $\det(E) = \det(2I_1)\det(I_{n-1}) = 2 \neq 1$.

8. *Prüfung Sommer 2017:* Es gibt eine invertierbare, reelle 3×3 Matrix, die schiefsymmetrisch ist.

(a) Richtig

$\surd$ (b) Falsch

Wir haben in dieser Serie gezeigt, dass für jede reelle, schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix A mit ungeradem n gilt $\det(A) = 0$. Insbesondere ist A also nicht invertierbar.

9. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $m > n$. Dann gilt $\det(AB^T) = 0$.

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Es gilt $\text{Rang}(AB^T) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\} \leq n < m$. Da AB^T eine $m \times m$-Matrix ist, hat AB^T also nicht vollen Rang, und somit folgt $\det(AB^T) = 0$.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Wir haben in MC-Aufgabe 3 gezeigt, dass det im Allgemeinen nicht additiv ist.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann gilt

$$\det(A + B) = \det(B + A).$$

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Da die Addition auf $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ kommutativ ist, gilt $A + B = B + A$ und somit insbesondere die Behauptung.