Dr. Meike Akveld

MC-Serie 3 – Gruppen, Ringe und Körper

Einsendeschluss: 15.10.2017 23:59

1. Für welche der folgenden Verknüpfungen können wir eine abelsche Gruppe $(G, \circ, e)$ definieren?

(a) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b := \max\{a, b\}$.

(b) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b := \text{kgV}(a, b)$.

(c) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $a \circ b := a^b$.

√ (d) $G := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $a \circ b := \frac{ab}{1-(a+b)+2ab}$

(a). Angenommen die Verknüpfung definiert eine Gruppe, dann existiert ein neutrales Element, d.h. ein $e \in \mathbb{N}$, sodass für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $a = e \circ a = \max\{e, a\}$. Daraus folgt sofort $e = 1$. Da nach Annahme G eine Gruppe ist, existiert für alle $a \in \mathbb{N}$ ein $a^{-1} \in \mathbb{N}$, sodass $1 = e = a^{-1} \circ a = \max\{a^{-1}, a\}$. Daraus folgt, dass $a \leq 1$. Das ist absurd.

(b). Wir zeigen, dass das kleinste gemeinsame Vielfache kgV keine Gruppenstruktur definiert. Angenommen, es gäbe inverse Elemente für die Verknüpfung, i.e. insbesondere existiert ein fixes neutrales Element $a \in \mathbb{N}$ (d.h. $\text{kgV}(a, b) = b$ für alle $b \in \mathbb{N}$) sowie für jedes $b \in \mathbb{N}$ ein $b^* \in \mathbb{N}$ so dass $\text{kgV}(b, b^*) = a$. Aber $\text{kgV}(b, x) \geq b$ für alle $x \in \mathbb{N}$, also gilt $\text{kgV}(2a, x) \geq 2a \neq a$ für alle $x \in \mathbb{N}$, so dass $2a$ keine Inverse haben kann. Dies ist ein Widerspruch.

(c). Die Verknüpfung ist nicht assoziativ, da beispielsweise

$$(2 \circ 2) \circ 3 = (2^2) \circ 3 = 4^3 = 64$$
$$2 \circ (2 \circ 3) = 2 \circ (2^3) = 2^8 = 256$$

gilt.

(d). Die Verknüpfung definiert tatsächlich eine abelsche Gruppe. Wir bemerken zuerst, dass

$$1 - (a + b) + 2ab > 1 - (a + b) + ab = (1 - a)(1 - b) > 0 \quad \forall a, b \in (0, 1)$$

Des Weiteren gilt also

$$\begin{aligned} \frac{ab}{1 - (a + b) + 2ab} \geq 1 &\Leftrightarrow ab \geq 1 - (a + b) + 2ab = ab + (1 - a)(1 - b) \\ &\Leftrightarrow 0 \geq (1 - a)(1 - b) \end{aligned}$$

Beides zusammen beweist also dass $a * b \in (0,1)\, \forall a, b \in (0,1)$ und folglich ist die Verknüpfung wohldefiniert.

Man sieht sofort, dass

$$a * b = \frac{ab}{1-(a+b)+2ab} = \frac{ba}{1-(b+a)+2ba} = b * a$$

und somit ist die Verknüpfung kommutativ.

Zur Bestimmung eines neutralen Elements schauen wir, ob die Gleichung $a * b = a$ eine Lösung $b \in (0,1)$ besitzt. Tatsächlich

$$\begin{aligned}\frac{ab}{1-(a+b)+2ab} = a \Leftrightarrow ab =& a(1-(a+b)+2ab) \\ =& a - a^2 - ab + 2a^2b \\ \Leftrightarrow& 2ab - a = 2a^2b - a^2 \\ \Leftrightarrow& a(2b-1) = a^2(2b-1) \\ \Leftrightarrow& a(a-1)(2b-1) = 0 \\ \Leftrightarrow& b = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

da $a, a-1 \neq 0$.

Wir bestimmen die Inverse $b \in (0,1)$ so dass $a * b = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{ab}{1-(a+b)+2ab} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow& 2ab = 1-(a+b)+2ab \\ \Leftrightarrow& b = 1-a\end{aligned}$$

also ist $b := 1-a$ das zu a inverse Element, i.e. $a * (1-a) = \frac{1}{2}$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Seien $a, b, c \in (0,1)$, dann berechnet man

$$\begin{aligned}(a * b) * c =& \frac{(a*b)c}{1-(a*b+c)+2(a*b)c} \\ =& \frac{abc}{1-a-b-c+ab+ac+bc}\end{aligned}$$

Wegen der Kommutativität der Verknüpfung gilt also

$$\begin{aligned} a * (b * c) =& (b * c) * a \\ =& \frac{bca}{1 - b - c - a + bc + ba + ca} \\ =& \frac{abc}{1 - a - b - c + ab + ac + bc} \end{aligned}$$

Also ist $(a * b) * c = a * (b * c)$ und somit liefert die Verknüpfung $*$ die Gruppe $\big((0,1), *, \frac{1}{2}\big)$.

2. *Prüfung HS 2016:* Die Vorschrift $G = \mathbb{N}, a * b := \min\{a, b\}$ definiert eine Gruppe $(G, *)$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Angenommen die Vorschrift definiere eine Gruppe. Dann existiert ein neutrales Element $e \in \mathbb{N}$, sodass für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $a = e * a = \min\{a, e\}$. Insbesondere ist also $e \geq a$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Dies ist absurd, da $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Ein sauberer Beweis verwendet die Axiome (11), (12) und (14) für angeordnete Körper (siehe Analysisskript, Abschnitt 2.1.2).

3. *Prüfung HS 2016:* Seien $f, g \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f) = \deg(g) = n$, dann ist $\deg(f + g) = n$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Sei $f \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist $\deg(f) \geq 0$. Da $\mathbb{R}[X]$ bezüglich Addition eine Gruppe ist, existiert ein $g \in \mathbb{R}[X]$, sodass $f + g = 0$ ist. Wir haben gesehen, dass $\deg(f) = \deg(g)$ gilt. Es ist $\deg(f + g) = \deg(0) = -\infty$.

4. Betrachten Sie die Verknüpfungen $+, \cdot$ auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) :=& (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) :=& (a_1 b_1 + 3 a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\end{aligned}$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

$\surd$ (a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist ein Ring.

$\surd$ (b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist ein Körper.

Man überprüft leicht, dass $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit diesen Verknüpfungen ein Ring ist (vergleichen Sie die Verknüpfungen mit der Addition und der Multiplikation auf $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$). Man sieht leicht, dass $(1, 0) \cdot (b_1, b_2) = (b_1, b_2)$ für alle $(b_1, b_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, und somit handelt es sich um einen Ring mit Eins.

Um zu zeigen, dass es sich um einen Körper handelt, zeigen wir zuerst, dass $\sqrt{3}$ irrational ist. Angenommen, das sei falsch, d.h. es existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd mit $q \neq 0$ so dass $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$. Dann ist $p^2 = 3q^2$ und folglich gilt $3 \mid p^2$. Jede ganze Zahl p lässt sich schreiben als $p = 3k + s$ mit $s = 0, 1, 2$. Es gilt

$$p^2 = 9k^2 + 6ks + s^2$$

und folglich gilt $3 \mid p^2 \implies s = 0$. In dem Falle gilt aber $3 \mid p$ und also $3 \mid q^2$ und analog folgt $3 \mid q$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass p, q teilerfremd sind.

Man überprüft direkt, dass $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2)$. Sei $(a_1, a_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$. Dann ist $d := a_1^2 - 3a_2^2 \neq 0$ und

$$\left(\frac{a_1}{d}, \frac{-a_2}{d}\right) \cdot (a_1, a_2) = \left(\frac{a_1}{d} a_1 + 3\frac{-a_2}{d} a_2, \frac{a_1}{d} a_2 + \frac{-a_2}{d} a_1\right) = (1, 0)$$

was zu beweisen war.