MC-Serie 8

Komposition, Matrixmultiplikation, Invertierbarkeit, Isomorphismen

Einsendeschluss: 19.11.2017 23:59

1. Gegeben seien Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist nicht definiert?

(a) CA^T

(b) $B^T A$

√ (c) $C^T B$

(d) $B^T C^T$

(e) AC^T

Wir erinnern uns: Falls $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$. Dann ist das Produkt AB definiert genau dann, wenn $n = p$ und es gilt $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$.

2. (Zwischenprüfung Frühjahr 2015) Welcher der folgenden fünf Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A + B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen derselben Grösse A und B?

√ (a) $A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A + B)(B + A)$

(c) $(B + A)^2$

(d) $A(A + B) + B(A + B)$

(e) $A^2 + AB + BA + B^2$

Aus dem Kommutativ- und Assoziativgesetz der Matrixaddition und dem Distributivgesetz der Matrixaddition und -multiplikation folgt, dass alle Ausdrücke ausser (a) denselben Wert haben wie $(A + B)^2$. Der Ausdruck (a) ergibt nur dann denselben Wert, wenn $AB = BA$ ist.

3. Betrachten Sie die linearen Abbildungen $T, S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix}, \quad S_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}, \quad S_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Dann gilt

(a) $T = S_2 \circ S_1$

√ (b) $T = S_1 \circ S_2$

(c) keins von beiden

(d) beide

Wir berechnen

$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S_2 \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix} \\ S_1 \circ S_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S_1 \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete Basen für V und W. So gilt $[T^2]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \left([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^2$.

(a) richtig

√ (b) falsch

Da V, W verschiedene Vektorräume sein können, ist T^2 ex ante nicht wohldefiniert und insbesondere ist $[T^2]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ nicht wohldefiniert.

5. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete (endliche) Basen für V und W. So gilt

$$\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

(a) richtig

√ (b) falsch

$T^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$ (falls definiert), und somit ist $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ nicht definiert. Falls T invertierbar ist, dann gilt $([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

6. $AB = I \implies A$ und B sind invertierbar.

(a) richtig

√ (b) falsch

A könnte eine $m \times n$ - Matrix sein und B eine $n \times m$ -Matrix. Für solche Matrizen ist der Begriff "invertierbar" nicht definiert, aber könnte $AB = I$ gelten. Betrachten Sie das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $AB = I_2$, aber weder A noch B ist invertierbar.

7. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist ein Unterraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Wahr

✓ (b) Falsch

Die Nullmatrix ist nicht invertierbar.

Beachten Sie zudem, dass die Menge der invertierbaren Matrizen nicht abgeschlossen ist bezüglich Addition. In der Tat ist $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) = I_2$, und also $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ invertierbar, aber

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

8. *Prüfung Winter 2017:* Seien U, V, W Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Gegeben seien lineare Abbildungen $T : U \to V$ und $S : V \to W$, dann gilt

$$[S\circ T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\,[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\,.$$

(a) Wahr.

✓ (b) Falsch.

Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass gilt

$$[S\circ T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\,[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\,.$$

Insbesondere wissen wir, dass $[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in M_{|\mathcal{B}|\times|\mathcal{A}|}(\mathbb{K})$ und analog $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in M_{|\mathcal{C}|\times|\mathcal{C}|}(\mathbb{K})$. Somit ist die rechte Seite in der Fragestellung nicht wohldefiniert, falls $\dim(U) \neq \dim(W)$ ist.

9. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dann ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\}$ ein Unterrraum von $\mathbb{K}^n$.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Es ist

$$\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\} = \mathrm{Ker}(A - B),$$

und somit ein Unterraum.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Die Abbildung $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch $T(f) = f'$ ist linear.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wir wissen aus der Schule, dass für differenzierbare Funktionen f, g auf $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$(f + \lambda g)'(x) = f'(x) + \lambda g'(x) \quad (\text{für alle } x \in \mathbb{R}),$$

und somit gilt $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt: T ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das wurde in der Vorlesung bewiesen.

12. *Prüfung Sommer 2017:* Die einzige reelle 2×2 Matrix A, die $A^2 = 0$ erfüllt, ist $A = 0$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = I_n \implies BA = I_n$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Falls $AB = I_n$ ist, dann besitzt $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine Rechtsinverse und ist somit surjektiv. Nach Aufgabe 2.a) von Serie 7 ist L_A also injektiv, und somit ist L_A bijektiv. Insbesondere ist nach Aufgabe 1.e) von Serie 8 die Abbildung L_B eine Linksinverse von L_A, und es folgt

$$L_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = L_B \circ L_A = L_{BA},$$

und da die Abbildung $A \mapsto L_A$ injektiv ist, folgt $BA = I_n$.

14. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = 0 \implies BA = 0$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann gelten $AB = 0$, aber $BA = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$