Dr. Meike Akveld

MC-Serie 5

Lineare (Un-)Abhängigkeit, Basis & Dimension

Einsendeschluss: 29.10.2017 23:59

1. (Aufgabe aus der Zwischenprüfung 2014) Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig?

√ (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Angenommen es v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig, d.h. es existieren $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit

$$0_{\mathbb{R}^4} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = \begin{pmatrix} \alpha + \delta \\ \beta + \gamma \\ \beta - \gamma \\ \alpha - \delta \end{pmatrix}$$

Dann sind $-\delta = \alpha = \delta$ und $-\gamma = \beta = \gamma$, und also $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Widerspruch!

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Jede Teilmenge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Also ist $0 = v_1 + v_2 + v_3 - v_4$ eine nicht-triviale lineare Abhängigkeit.

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $v_4 = v_1 - v_2 + v_3$ und folglich ist die Menge linear abhängig.

(e) Keine der Mengen ist linear unabhängig.

2. Jede Teilmenge $S \subset V$ eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig

√ (a) richtig

(b) falsch

Sei $\alpha \in \mathbb{K}$, dann ist

$$0_V = \alpha 0_V$$

und somit ist S linear abhängig.

3. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$\surd$ (a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge $W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda \cdot v\}$ ein Unterraum von V.

$W = \langle v \rangle$ und somit ein Unterraum.

$\surd$ (b) Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.

"$\Leftarrow$": Angenommen $W = \langle W \rangle$, dann ist W ein Unterraum, da $\langle W \rangle$ per definitionem ein Vektorraum ist.

"$\Rightarrow$": Angenommen W ist ein Unterraum. Dann ist W trivialerweise ein Unterraum, der W enthält. Da $\langle W \rangle$ ein minimaler Unterraum mit dieser Eigenschaft ist, folgt $\langle W \rangle \subset W$. Per definitionem $W \subset \langle W \rangle$ und es folgt die gewünschte Gleichheit.

$\surd$ (c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

"$\supset$": Wir wissen, dass $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ der kleinste Unterraum ist, der $\langle S_1 \rangle$ und $\langle S_2 \rangle$. Da $S_i \subset S_1 \cup S_2$ für $i = 1, 2$, folgt $\langle S_i \rangle \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$ und wegen Minimalität auch $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.

'$\subset$": $S_i \subset \langle S_i \rangle \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$, also $S_1 \cup S_2 \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$. Wegen Minimalität folgt also $\langle S_1 \cup S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

$\surd$ (d) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

$S_1 \cap S_2 \subset S_i \subset \langle S_i \rangle$ für $i = 1, 2$, und somit $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subset \langle S_i \rangle$ für $i = 1, 2$ wegen der Minimalität von $\langle S_1 \cap S_2 \rangle$. Also gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

(e) Keine der Aussagen ist richtig.

4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Es existieren eindeutige Unterräume $W_1, W_2 \subset V$ mit $\dim W_1 = 0$ und $\dim W_2 = n$.

$\checkmark$ (a) Wahr

(b) Falsch

$\dim W = 0$ impliziert $W = \{0_V\}$ und dieser Unterrraum existiert und ist eindeutig. V ist ein Unterraum von V mit Dimension n, und folglich existiert einer. Wir müssen zeigen, dass dies der einzige Unterraum von Dimension n ist. Sei $W \subset V$ ein Unterraum von Dimension n. Dann besitzt W eine Basis $\mathcal{B}$ von Kardinalität n. Jede solche Basis ist auch eine linear unabhängige Teilmenge von V und nach dem Korollar aus der Vorlesung eine Basis von V. Insbesondere ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V, also $V \subset W$ und folglich $V = W$.

5. Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $S_1 \subset V$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Falls S linear abhängig ist, so ist jeder Vektor $v \in S$ eine Linearkombination von Vektoren in $S \setminus \{v\}$.

Sei $V \neq \{0_V\}$ und $v \in V \setminus \{0_V\}$. Dann ist $\{0_V, v\}$ linear abhängig, aber $v \neq \alpha 0_V$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

(b) Sei S linear abhängig und $T \subset S$. Dann ist T linear abhängig.

Sei $V \neq \{0_V\}$ und $v \in V \setminus \{0_V\}$. Dann ist $S := \{0_V, v\}$ linear abhängig und $T := \{v\} \subset S$ linear unabhängig.

$\surd$ (c) Sei S linear unabhängig und $T \subset S$. Dann ist T linear unabhängig.

Jede Linearkombination von Elementen in T ist eine Linearkombination von Elementen in S. Falls T linear abhängig ist, dann ist also auch S linear anhängig.

(d) Sei $S_2 \subset V$ mit $\langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle$, dann gilt $|S_2| \leq |S_1|$.

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $1 < |V|$, und sei $v \in V \setminus \{0_V\}$. Sei $S_1 := \{v\}$, $S_2 := \{v, 2v\}$. Dann ist $\langle S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle$ aber $|S_1| < |S_2|$.

$\surd$ (e) Seien $\dim V < \infty$ und S_1 linear unabhängig. Sei $S_2 \subset V$ mit $\langle S_2 \rangle = V$, dann gilt $|S_1| \leq |S_2|$.

Da $\langle S_2 \rangle = V$, enthält gemäss Theorem aus der Vorlesung S_2 eine Basis von V, insbesondere ist also $\dim V \leq |S_2|$. Da S_1 linear unabhängig ist, existiert nach dem Steinitz'schen Austauschsatz eine Teilmenge $S_3 \subset V$ so dass $S_1 \cup S_3$ eine Basis von V. Es folgt $|S_1| \leq |S_1 \cup S_3| = \dim V$ und folglich $|S_1| \leq |S_2|$.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

6. *Prüfung Winter 2017:* Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt

$$\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{span}(S_1) \cup \operatorname{span}(S_2).$$

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Vereinigung zweier Vektorräume ist im Allgemeinen kein Vektorraum, wie in der Vorlesung gezeigt wurde.

7. *Prüfung Winter 2017:* Seien V ein Vektorraum, $S \subset V$ eine Teilmenge und W ein Unterraum von V. Wenn $S \subset W$, dann gilt $W \subset \operatorname{span}(S)$.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Sei $W = V$ und $S = \{0_V\}$, dann ist $\operatorname{span}(S) = S$ und somit im Allgmeinen $W \not\subset \operatorname{span}(S)$.

8. *Prüfung Winter 2017:* Seien V ein Vektorraum und $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume mit $\dim W_i = m_i$ für $i = 1, 2$ und sei $W_1 \oplus W_2 = V$. So gilt

$$\dim (W_1 \oplus W_2) = m_1 + m_2.$$

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

9. *Prüfung Winter 2017:* Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume mit $\dim(U_1) = 1, \dim(U_2) = 2$. Dann gilt

$$V = U_1 + U_2.$$

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Sei $v \in U_2 \setminus \{0_V\}$ und $U_1 = \langle v \rangle$, dann ist $U_1 + U_2 \subset U_2$, also $\dim(U_1 + U_2) \leq 2 < \dim(V)$ und folglich $U_1 + U_2 \neq V$.

10. *Prüfung Winter 2017:* Sei V ein Vektorraum mit einem unendlichen Erzeugendensystem. Dann ist V unendlich-dimensional.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q} \rangle$, somit ist $\mathbb{Q}$ ein unendliches Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ hat Dimension 1.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Betrachten Sie die Unterräume $V_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$. Dann ist $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $v = (x, y, z) \in V_1 \cap V_2$, dann ist $y = z = 0$ wegen $v \in V_2$ und wegen $v \in V_2$ folgt $x = -y = 0$ und somit $v = (0, 0, 0)$, d.h. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Es ist

$$v = (x, y, z) = \underbrace{(x + y, 0, 0)}_{\in V_1} + \underbrace{(-y, y, z)}_{\in V_2}.$$

12. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein Vektorraum. Dann gilt: Jede Teilmenge von V ist entweder linear abhängig oder linear unabhängig.

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge und sei A die Aussage "S ist linear abhängig" und sei B die Aussage "S ist linear unabhängig". Per definitionem sind B und $\neg A$ äquivalent, und es folgt

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

und da $S \subseteq V$ beliebig war, ist somit jede Teilmenge entweder linear abhängig oder linear unabhängig.

13. *Prüfung Sommer 2017:* Drei Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn jede der Mengen $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist)

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Menge bestehend aus zwei Vektoren genau dann linear abhängig ist, wenn die beiden Vektoren kollinear sind. Betrachte die Vektoren $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $v = (1, 1)$ in $\mathbb{R}_{\not\models}$. Die Vektoren sind paarweise linear unabhängig, denn sie sind alle nicht kollinear. Es ist aber $0 = -e_1 - e_2 + v$ und somit sind die drei Vektoren linear abhängig.

14. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein Vektorraum. Für jede nicht-leere Teilmenge $S \subset V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- Kein Element von S ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von S.
- Jeder Vektor in V besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S.

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

15. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler Vetorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume mit $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Dann gilt

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) \cdot \dim(W_2).$$

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Wir haben gezeigt, dass $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$ gilt, und im Allgemeinen ist $\dim(W_1) \cdot \dim(W_2) \neq \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

16. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein Vektorraum. Je zwei Erzeugendensysteme von V haben dieselbe Kardinalität.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

$\{1\}$ und $\{1, 2\}$ sind zwei Erzeugendensysteme von $\mathbb{F}_7$.