MC-Serie 17 – Satz von Cayley-Hamilton & spezielle Endomorphsimen

Einsendeschluss: 11.03.2018 23:59

1. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Dann existiert ein Polynom p von Grad $\dim V$ und mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, sodass $p(T)$ die Nullabbildung ist.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist $\operatorname{char}_T(T) = 0$ und es folgt sofort aus der Definition von $\operatorname{char}_T(X)$, dass $\operatorname{char}_T(X) \in \mathbb{K}[X]$ mit $\deg\big(\operatorname{char}_T(X)\big) = \dim V$.

2. Jedes Polynom mit Leitkoeffizient $(-1)^n$ ist charakteristisches Polynom eines Operators.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wir haben in der letzten Serie für $q \in \mathbb{K}[X]$ mit Leitkoeffizient 1 gezeigt, dass $q(X) = (-1)^n \operatorname{char}_A(X)$ für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wir konnten A sogar konkret angeben: Sei $q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, dann ist die *Begleitmatrix* A mit der Eigenschaft $q(X) = (-1)^n \operatorname{char}_A(X)$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wenn also $p(X) = (-1)^n q(X)$ ist, wobei q Leitkoeffizient $(-1)^n$ habe, und wenn A die *Begleitmatrix* zu q ist, dann ist insbesondere $p(X) = \operatorname{char}_{L_A}(X)$ nach Definition des charakteristischen Polynoms eines linearen Operators.

3. Betrachte die lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Was sind die invarianten Unterräume von L_A?

(a) $\mathbb{R}^2$ und $\operatorname{span}\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$

√ (b) $\mathbb{R}^2$ und $\{0\}$

(c) $\mathbb{R}^2$, $\{0\}$ und $\operatorname{span}\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$

(d) $\mathbb{R}^2$

Es ist klar, dass $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$ invariante Unterräume von L_A sind. Angenommen $W \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein weiterer invarianter Unterraum, dann ist $\dim W = 1$ und insbesondere existiert $v \in W \setminus \{0\}$, so dass $W = \mathbb{R}v$. Da W invariant ist, gilt $L_A(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und folglich ist v ein Eigenvektor von L_A, zu einem reellen Eigenwert λ.

Das charakteristische Polynom von L_A ist gegeben durch

$$\operatorname{char}_{L_A}(X) = (2 - X)(-2 - X) + 6 = X^2 + 2,$$

und hat also Diskriminante -8, bzw. keine reellen Nullstellen. Insbesondere hat L_A keinen reellen Eigenwert und folglich besitzt L_A keine eindimensionalen invarianten Unterräume. Die richtige Antwort ist also Antwort (b).

4. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - X - 1$, dann ist

(a) A^{-1} existiert nicht.

(b) A^{-1} existiert aber kann nicht aus diesen Angaben hergeleitet werden.

(c) $A^{-1} = A + I_n$.

√ (d) $A^{-1} = A - I_n$.

Wir wissen, dass für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt $\deg \mathrm{char}_A(X) = n$. Folglich ist für A wie in der Aufgabenstellung $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Wir haben aber bereits gesehen, dass eine Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn der konstante Term des charakteristischen Polynoms von Null verschieden ist, und in diesem Falle gilt für $\mathrm{char}_A(X) = X^2 + a_1 X + a_0$ nach Cayley-Hamilton und dem, was wir in Aufgabe 4 gezeigt haben, dass

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A + a_1 I_2).$$

Unter den Voraussetzungen der Aufgabenstellung ist also A invertierbar und $A^{-1} = A - I_2$.

5. Betrachte die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, x, y)$. So ist $T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ eine Nullstelle des Polynoms

(a) $p(X) = X$.

(b) $p(X) = X^2$.

(c) $p(X) = X^3$.

√ (d) $T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ist nicht eine Nullstelle eines Polynoms aus der obigen Liste.

Es ist $A := [T]_{\mathcal{E}_3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich $B = [T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist B invertierbar und somit auch B^k für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist auch $(T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ invertierbar und insbesondere nie 0.

6. Sei A eine 5×5 obere Dreiecksmatrix mit allen Einträgen auf der Diagonalen gleich 0, so gilt für die Matrix $I_5 + A$:

(a) Sie ist idempotent.

√ (b) Sie ist invertierbar.

(c) Sie ist singulär.

(d) Sie ist nilpotent.

Die Matrix $I_5 + A$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen gleich 1. Folglich ist $\det(I_5 + A) = 1$ und folglich ist $I_5 + A$ invertierbar. Also ist Aussage (b) richtig und Aussage (c) falsch. Da Potenzen invertierbarer Matrizen wieder invertierbar sind, ist $I_5 + A$ nicht nilpotent, da wegen der Multiplikativität der Determinante gilt $\det(A^k) = (\det A)^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Im Allgemeinen muss $I_5 + A$ nicht idempotent sein, denn bspw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. *Prüfung Winter 2018:* Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, sodass AB nilpotent ist, aber BA nicht nilpotent ist.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Sei $(AB)^n = 0$, dann ist $(BA)^{n+1} = B(AB)^n A = 0$.

8. *Prüfung Winter 2018:* Sei A eine Matrix mit $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 3X$, so ist A invertierbar.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch, da der konstante Term des charakteristischen Polynoms mit der Determinanten übereinstimmt. Alternativ weiss man wegen Cayley-Hamilton, dass $0 = A^2 - 3A = A(A - 3I_2)$. Es ist $\mathrm{char}_{3I_2} = X^2 - 6X + 9$ und somit folgt $\mathrm{Rang}(A - 3I_2) \neq 0$. Da invertierbare Abbildungen den Rang erhalten, ist A nicht invertierbar wegen $\mathrm{Rang}(A^2 - 3A) = 0$.

9. *Prüfung Winter 2018:* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei char_T das charakteristische Polynom von T. Dann gilt $\mathrm{char}_T(T) = 0$.

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Die Aussage ist wahr. Dies ist der Satz von Cayley-Hamilton.

10. *Prüfung Winter 2018:* Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Die Rotation in der reellen Ebene um den Ursprung um $\frac{\pi}{2}$ ist nicht diagonalisierbar, aber sicherlich invertierbar.