D-MATH/D-PHYS Lineare Algebra I HS 16

Dr. Meike Akveld

MC-Serie 9

Basiswechsel & Dualraum

Einsendeschluss: 26.11.2017 23:59

1. Jede Basiswechselmatrix ist invertierbar.

√ (a) richtig

(b) falsch

Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete Basen eines Vektorraums V. Es gilt

$$[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = I$$
$$[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I$$

2. Sei $\mathcal{E}_2 := (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{C} := \left(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ eine weitere geordnete Basis. Bestimmen Sie die $Q := [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_2}$.

√ (a) $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(d) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) $Q = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$$

Also gelten

$$[e_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [e_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2), \quad \mathcal{C} = (x^2, (x+1)^2, (x+2)^2)$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $Q := [\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

(a) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

√ (e) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Man löst das Gleichungssystem

$$p = ax^2 + b(x+1)^2 + c(x+2)^2 = (a+b+c)x^2 + (2b+4c)x + (b+4c)$$

für $p = 1, x, x^2$ unter Verwendung der Eindeutigkeit der Koeffizienten. Sei beispielsweise $p = 1$, dann folgt aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten, dass

$$\begin{aligned} b + 4c &= 1 \\ 2b + 4c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $c = -\frac{1}{2}b$ und nach einsetzen in die erste Gleichung $b = -1$, und also $c = \frac{1}{2}$. Einsetzen in die dritte Gleichung impliziert dann $a = \frac{1}{2}$ und folglich

$$[1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da die Aufgabe richtig gestellt ist, ist man hier bereits fertig. Alternativ berechnet man $[x]_{\mathcal{C}}$, $[x^2]_{\mathcal{C}}$.

4. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $T : V \to V^*$ ein Isomorphismus und $\mathcal{B}$ eine endliche geordnete Basis für V so gilt $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$

(a) richtig

√ (b) falsch

Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $1 \neq -1$ in $\mathbb{K}$. Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2)$ die zu $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ duale Basis von V^*. Dann ist $\{f_1 + f_2, f_1 - f_2\}$ eine Basis von V^* (vgl. Serie 5). Die lineare Erweiterung von

$$T(v_1) := f_1 + f_2, \quad T(v_2) = f_1 - f_2$$

ist ein Isomorphismus $T : V \to V^*$, aber $T(\{v_1, v_2\}) \neq \{f_1, f_2\}$. Zum Beispiel ist $(f_1 + f_2)(v_1) = (f_1 + f_2)(v_2) = 1$, und folglich $f_1 + f_2 \notin \{f_1, f_2\}$.

5. Seien V, W endlichdimensional und V isomorph zu W, so ist V^* isomorph zu W^*

√ (a) richtig

(b) falsch

Wie in der Vorlesung gezeigt, gelten $V \cong V^*$ und $W \cong W^*$. Wegen der Transitivität von Isomorphie (vgl. Serie 8) folgt

$$V^* \cong V, V \cong W, W \cong W^* \Rightarrow V^* \cong W^*$$

6. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C}$ geordnete Basen von V bzw. W. Sei $\mathcal{C}^* = (f_1, \ldots, f_m)$ die zu $\mathcal{C}$ duale Basis von W^*. Dann ist für beliebige $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ij} = f_i(T(v_j)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

√ (a) richtig

(b) falsch

Seien $Q = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$, dann ist per definitionem

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} Q_{ij} w_i$$

und folglich

$$f_i(T(v_j)) = f_i\Big(\sum_{k=1}^{m} Q_{kj} w_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} Q_{kj} f_i(w_k) = \sum_{k=1}^{m} Q_{kj} \delta_{ik} = Q_{ij}$$

Also gilt

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ij} = Q_{ij} = f_i(T(v_j))$$

7. *Prf̈ung Sommer 2017:* Sei $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und

$$\mathrm{tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; A \mapsto \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

die Spur. Dann ist $\mathrm{tr} \in V^*$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Es gilt nach Definition der Vektorraumstruktur auf $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n}(A + \lambda B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A_{ii} + \lambda B_{ii}) = \mathrm{tr}(A) + \lambda\mathrm{tr}(B).$$

Folglich ist tr linear und da $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$ liegt für alle $A \in V$, folgt $\mathrm{tr} \in V^*$.