Dr. Meike Akveld

MC-Serie 7

Lineare Abbildungen: Kern, Bild, Rang und Darstellung durch Matrizen

Einsendeschluss: 12.11.2017 23:59

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

√ (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$.

Vergleichen Sie die Aufgabe mit Teilaufgabe (c) und adaptieren Sie das Argument von dort.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$.

Wir berechnen

$$f(0) + f(0) = (0, 0, 1) + (0, 0, 1) = (0, 0, 2) \neq (0, 0, 1) = f(0) = f(0 + 0)$$

Also ist die Abbildung nicht linear.

√ (c) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, $(x, y, z) \mapsto (\alpha x+\beta y+\gamma z, \delta x+\epsilon y+\eta z)$ für fixe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta$ im Körper $\mathbb{K}$.

Seien $v := (x, y, z), v' := (x', y', z') \in \mathbb{K}^3$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Per definitionem sind

$$v + v' = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{und} \quad \lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Es folgen also unter Verwendung der Körperaxiome

$$\begin{aligned}
f(v + v') =& f(x + x', y + y', z + z') \\
=& \begin{pmatrix} \alpha(x + x') + \beta(y + y') + \gamma(z + z') \\ \delta(x + x') + \epsilon(y + y') + \eta(z + z') \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} (\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') \\ (\delta x + \epsilon y + \eta z) + (\delta x' + \epsilon y' + \eta z') \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \delta x + \epsilon y + \eta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ \delta x' + \epsilon y' + \eta z' \end{pmatrix} \\
=& f(v) + f(v') \\
f(\lambda v) =& f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
=& \begin{pmatrix} \alpha\lambda x + \beta\lambda y + \gamma\lambda z \\ \delta\lambda x + \epsilon\lambda y + \eta\lambda z \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z) \\ \lambda(\delta x + \epsilon y + \eta z) \end{pmatrix} \\
=& \lambda \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \delta x + \epsilon y + \eta z \end{pmatrix} = \lambda f(v)
\end{aligned}$$

Also ist f linear.

2. Sei $T \in \mathrm{End}(P_4(\mathbb{R}))$ gegeben durch

$$T(p(x)) := (x+1)p'(x) \quad \text{für } p(x) \in P_4(\mathbb{R})$$

Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $P_4(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = (1, x+1, x^2, x^3, (x+1)^4)$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

√ (d) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -12 & -24 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

(f) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(g) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -16 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

$\checkmark$ (h) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Wir bezeichnen im Folgenden $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ und $\mathcal{C} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$. Die Spalte j von $[T]_{\mathcal{B}}$ ist der Koeffizientenvektor von $T(p_j)$ ausgedrückt in der Basis $\mathcal{B}$. Man berechnet:

$$T(p_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j = 1 \\ (j-1)p_j + (j-1)p_{j-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt

$$\forall 1 \leq i, j \leq 5 : ([T]_{\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j = 1 \\ 0 & \text{falls } j > 1, \text{ aber } i \notin \{j, j-1\} \\ j-1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um die Darstellungsmatrix von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ zu bestimmen, müssen wir die Menge $T(\mathcal{B})$ explizit bestimmen und ihre Elemente als Linearkombination der Elemente in $\mathcal{C}$ schreiben. Man berechnet:

$$\begin{aligned} T(p_2) &= p_2 + p_1 = q_2 \\ T(p_3) &= 2(p_3 + p_2) = 2(q_3 + q_2 - q_1) \\ T(p_4) &= 3(p_4 + p_3) = 3(q_4 + q_3) \\ T(p_5) &= 4(p_5 + p_4) = 4(q_5 - 3q_4 - 6q_3 - 4q_2 + 3q_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Spalten $([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{(j)}$, $1 \leq j \leq 5$ von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, dass:

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{(5)} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ -24 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

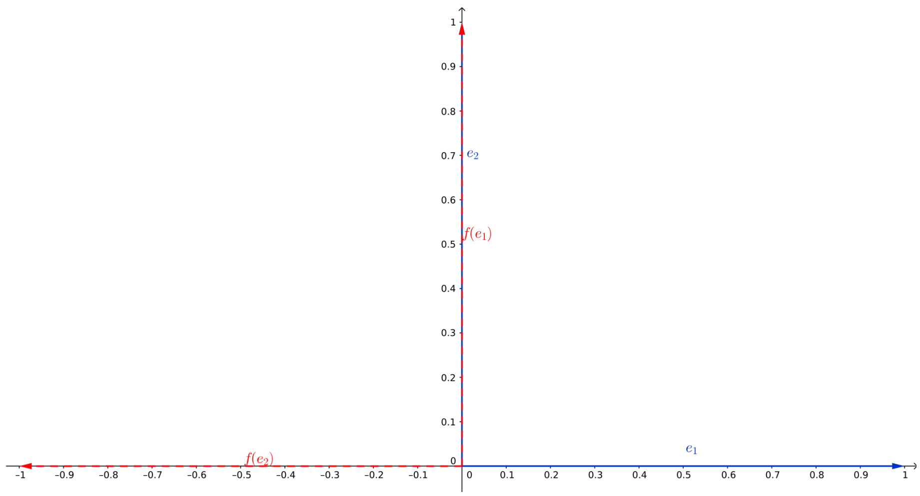

Figure 1: Wirkung von f auf der Standardbasis.

3. Im Folgenden bezeichnen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^2$, und bezeichne $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\surd$ (a) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{E}_2$, dann ist f eine Drehung um den Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Tatsächlich stimmt die Abbildung auf der Standardbasis mit der Rotation um $\frac{\pi}{2}$ entgegen dem Uhrzeigersinn überein, vgl. Abbildung 1. Wir wissen, dass Rotationen linear sind, und lineare Abbildungen durch Ihre Wirkung auf einer Basis vollständig bestimmt sind. Also ist f die Rotation um $\frac{\pi}{2}$ entgegen dem Uhrzeigersinn.

$\surd$ (b) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $\mathcal{C} = (e_2, -e_1)$, dann ist f eine Punktspiegelung im Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Die Punktspiegelung q im Urspung sendet den Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf $(-x, -y)$. Insbesondere gilt $q : e_1 \mapsto -e_1$ und $q : e_2 \mapsto -e_2$. Sei $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$, d.h. $v_1 := e_2$ und $v_2 := -e_1$. Dann ist also $q(e_1) = -e_1 = 0v_1 + 1v_2$ und $f(e_2) = -e_2 = (-1)v_1 + 0v_2$ und somit ist $[q]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und da jede lineare Abbildung durch eine Darstellungsmatrix vollständig bestimmt ist, folgt $f = q$ wie behauptet.

$\surd$ (c) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, dann ist $\mathcal{C} = (-e_2, e_1)$.

Sei $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$, dann gilt nach Voraussetzung $e_1 = f(e_1) = 0v_1 + 1v_2$ sowie $e_2 = f(e_2) = (-1)v_1 + 0v_2$ und folgich $v_2 = e_1$ und $v_1 = -e_2$ wie behauptet.

√ (d) Falls $\mathcal{C} = \mathcal{E}_2$ und f die Spiegelung an der y-Achse ist, dann ist $\mathcal{B} = (e_2, e_1)$.

Die Spiegelung f and der y-Achse sendet den Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf $(-x, y)$. Insbesondere ist $e_2 = f(e_2) = 0e_1 + 1e_2$ und $-e_1 = f(e_1) = (-1)e_1 + 0e_2$. Es folgt also $[f]^{\mathcal{C}}_{(e_2,e_1)} = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. Da f injektiv (bijektiv) ist, folgt $\mathcal{B} = (e_2, e_2)$.

4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Die Abbildung $V \to \mathbb{K}^{\dim V}$, die jedem Vektor $v \in V$ den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ zuordnet, ist linear.

Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und seine $v, v' \in V$ beliebig. Nach Annahme existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sowie $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$\begin{aligned} v =& \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \\ v' =& \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n \end{aligned}$$

Also ist

$$v + v' = (\lambda_1 + \lambda'_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda'_n)v_n$$

und folglich ist

$$\begin{aligned} [v + v']_{\mathcal{B}} =& (\lambda_1 + \lambda'_1, \ldots, \lambda_n + \lambda'_n) \\ =& (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n) \\ =& [v]_{\mathcal{B}} + [v']_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

per definitionem der Vektorraumstruktur auf $\mathbb{K}^n$. Sei nun $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} \alpha v =& \alpha(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ =& \alpha(\lambda_1 v_1) + \cdots + \alpha(\lambda_n v_n) \\ =& (\alpha\lambda_1)v_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n)v_n \end{aligned}$$

Es folgt also aus der Definition der Vektorraumstruktur auf $\mathbb{K}^n$, dass

$$[\alpha v]_{\mathcal{B}} = (\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n) = \alpha(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \alpha[v]_{\mathcal{B}}$$

Also ist die Abbildung linear.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, und seien $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$ sowie $\operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$. Dann ist $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$.

Man betrachte die Abbildung $f(x, y) = (x, 0)$. Dann ist $\operatorname{Ker}(f) = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$ und folglich

$$\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\{0\} \cap \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \cap \{0\}) = \{(0, 0)\}$$

im Widerspruch zur Behauptung.

√ (c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$. Dann ist f bijektiv.

Per Annahme ist $\operatorname{nullity}(f) = 0$, folglich

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \operatorname{nullity}(f) + \operatorname{Rang}(f) = \operatorname{Rang}(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$$

Also ist $\operatorname{Im}(f)$ ein n-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und folglich ist $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^n$. Also ist f surjektiv. Da per Annahme $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, ist f gemäss Theorem aus der Vorlesung injektiv. Also ist f injektiv und surjektiv, somit bijektiv.

5. Zu welcher Abbildung ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasen?

√ (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x + y, x, 2y)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x + y, x + 2z)$.

Seien $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_3 = (e'_1, e'_2, e'_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann gilt für f wie in Aussage (a):

$$\begin{aligned} f(e_1) =& f(1, 0) = (2, 1, 0) = 2e'_1 + 1e'_2 + 0e'_3 \\ f(e_2) =& f(0, 1) = (1, 0, 2) = 1e'_1 + 0e'_2 + 2e'_3 \end{aligned}$$

Also ist

$$[f]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man überprüft analog, dass für f wie in Aussage (b) gilt $[f]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3} = A^T$.

6. Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. So ist $[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ eine $n \times m$ -Matrix.

(a) richtig

√ (b) falsch

Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$. Per definitionem sind die Spalten von $[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ gegeben durch $([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^{(j)} = [Tv_j]_{\mathcal{C}}$, und für jedes $w \in W$ ist $[w]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{K}^m$. Also hat die Darstellungsmatrix von T bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ (und auch bezüglich allen anderen Paaren geordneter Basen von V und W) $n = |\mathcal{B}|$ Spalten und $m = |\mathcal{C}|$ Zeilen.

7. *Prüfung Winter 2017:* Seien $T : V \to W$ linear und $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ linear unabhängig. Dann ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung $(x, y) \mapsto x$, und seien $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$ und $v_3 = (1, 2)$. Dann ist

$$\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} = \{1\}$$

eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}$, aber die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ hat Kardinalität 3 und wegen $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ folgt, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine linear abhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

8. *Prüfung Winter 2017:* Seien V und W Vektorräume, $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ beliebig. Dann existiert eine lineare Abbildung $T : V \to W$ mit $T(v_1) = w_1$ und $T(v_2) = w_2$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Seien $v_1 = v_2$ und $w_1 \neq w_2$, dann existiert keine (insbesondere keine lineare) Abbildung mit der Eigenschaft $T(v_1) = w_1$ und $T(v_2) = w_2$. Angenommen $v_1 = 0_V$ und $w_1, w_2 \in W \setminus \{0_W\}$, dann existiert keine solche lineare Abbildung, da für jede lineare Abbildung gilt $T(0_V) = 0_W$.

9. *Prüfung Winter 2017:* Sei $T : V \to W$ linear. Falls das Bild von T eine Basis von W enthält, ist T surjektiv.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das Bild einer linearen Abbildung ist ein Unterraum und enthält somit das Erzeugnis jeder seiner Teilmengen. In diesem Falle also das Erzeugnis einer Basis von W, was per definitionem ganz W ist. Somit ist T also surjektiv.

10. *Prüfung Winter 2017:* Jeder Unterraum eines Vektorraumes V ist der Kern einer linearen Abbildung $T : V \to W$ für einen geeigneten Vekorraum W.

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $U = \mathrm{Ker}(p)$, wobei $p : V \to V/U$ die kanonische Projektion ist.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt: T ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei T injektiv, dann existiert höchstens ein Element $v \in V$ mit der Eigenschaft $T(v) = 0_W$. Da wegen der Linearität von T gilt $T(0_V) = 0_W$, folgt $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.

Angenommen, $T : V \to W$ ist linear und es gilt $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$. Seien $v_1, v_2 \in V$ mit der Eigenschaft $T(v_1) = T(v_2)$. Aus der Linearität von T folgt

$$0_W = T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2)$$

und somit ist $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(T)$. Aus der Voraussetzung folgt $0_V = v_1 - v_2$ und somit $v_1 = v_2$. Da $v_1, v_2 \in V$ mit der Eigenschaft $T(v_1) = T(v_2)$ beliebig waren, folgt die Injektivität von T.