MC-Serie 22

Symmetrische Bilinearformen & quadratische Formen

Einsendeschluss: 22.04.2018 23:59

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ symmetrisch, dann ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Wir zeigen, dass für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nicht kongruent ist zu einer Diagonalmatrix. Angenommen es ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, dann ist $ad - bc = ad + bc = 1$, da $bc = -bc$ gilt und weil $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times = \{1\}$ ist.

Man berechnet

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nur zu sich selber kongruent und insbesondere nicht kongruent zu einer Diagonalmatrix.

Man beachte: wenn in $\mathbb{K}$ 2 von 0 verschieden ist, dann ist die Aussage wahr.

2. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, sodass $A_{ij} > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist A positiv definit.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $x = (1, -2)^T$, dann ist $x^T Ax = -3 < 0$.

3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

√ (a) A^2 ist positiv definit.

√ (b) A^{-1} ist positiv definit.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Da A symmetrisch ist, existiert eine orthogonale Matrix $Q \in O(n)$, sodass $Q^T AQ$ eine Diagonalmatrix ist. Wie bereits in der vorangehenden Aufgabe diskutiert, folgt aus der positiven Definitheit von A, dass die Diagonaleinträge von $Q^T AQ$ alle strikt positiv sind. Dasselbe gilt somit auch für $(Q^T AQ)^2 = Q^T A^2 Q$ und $(Q^T AQ)^{-1} = Q^T A^{-1} Q$. Insbesondere sind $Q^T A^2 Q$ und $Q^T A^{-1} Q$ positiv definit und damit auch A^2 und A^{-1}.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Diagonalmatrix. Dann ist A kongruent zu jeder anderen Diagonalmatrix, mit denselben Diagonaleinträgen (bis auf Permutation der Indizes).

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Sei B eine andere Diagonalmatrix mit denselben Einträgen wie A, bis auf Vertauschung. Eine Vertauschung zweier Diagonaleinträge wird erreicht durch Links- und Rechtsmultiplikation von A mit einer Elementarmatrix vom Typ III, und jede Permutation ist eine Komposition endlich vieler Vertauschungen zweier Elemente, sodass

$$B = E_r \cdots E_1 A E_1 \cdots E_r.$$

Da Elementarmatrizen vom Typ III symmetrisch sind, ist

$$(E_1 \cdots E_r)^T = E_r^T \cdots E_1^T = E_r \cdots E_1$$

und folglich

$$B = (E_1 \cdots E_r)^T A (E_1 \cdots E_r).$$

Somit sind A und B kongruent.

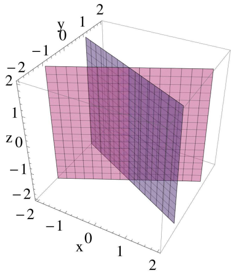
5. Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 4yy'.$$

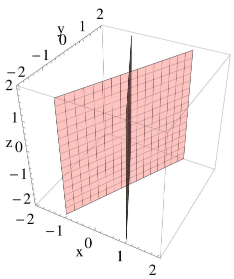
Sei Q die durch β induzierte quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$, d.h. $Q(v) = \beta(v,v)$. Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

$$X_{Q,0} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v) = 0\}?$$

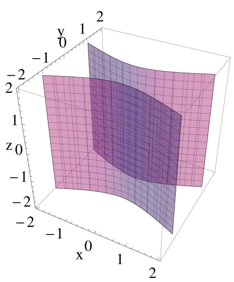
√ (a) 1



(b) 2



(c) 3



$x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2y$, also bekommen wir das erste Bild.

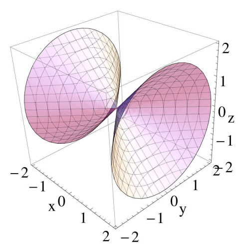
6. Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + yy' - zz'.$$

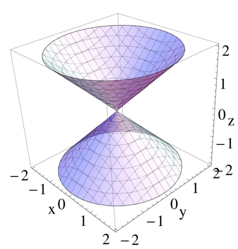
Sei Q die durch β induzierte quadratische Form. Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

$$X_{Q,0} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v) = 0\}?$$

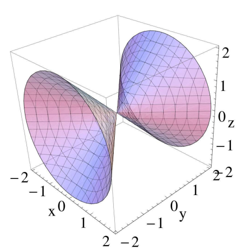
(a) 1



√ (b) 2



(c) 3



Wir betrachten den Durchschnitt der Quadrik mit Ebenen parallel zur xy-Ebene auf Höhe z_0 und sehen, dass

$$X_{Q,0} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z_0^2\}.$$

Also schneidet die Quadrik die "$z = z_0$-Ebene" in einem Kreis von Radius $r = |z_0|$. So erhalten wir Bild 2.

7. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte auf $\mathbb{K}^2$ die quadratische Form $Q(x,y) = x^2 - 2y^2$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^2$, sodass für die Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y})$ von (x,y) bezüglich $\mathcal{B}$ gilt:

(a) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$?

Nein. Siehe das Beispiel oben, wobei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

√ (b) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Ja, wobei $\mathcal{B} = (e_1, \frac{1}{\sqrt{2}} e_2)$. Dann ist

$$[Q]_{\mathcal{B}} = ([I_{\mathbb{K}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2})^T [Q]_{\mathcal{E}_2} [I_{\mathbb{K}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2},$$

wobei $[Q]_{\mathcal{B}}$ die Darstellungsmatrix der quadratischen Form, bzw. der dazugehörigen bilinearen Abbildung, ist. Es gilt

$$[I_{\mathbb{K}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

und somit folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} Q(x,y) =& [(x,y)]_{\mathcal{B}} [Q]_{\mathcal{B}} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \\ =& (\tilde{x}, \tilde{y}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \\ =& (\tilde{x}, \tilde{y}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 \end{aligned}$$

(c) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Nein. Die Signatur von Q ist $(1,-1)$. Die von $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$ ist $(2,0)$. Die Signatur ist aber eine Invariante der quadratischen Form und bleibt nach dem Trägheitssatz von Sylvester unter Basiswechsel erhalten.

√ (d) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Ja, mit $\mathcal{B} = (e_1, \frac{1}{\sqrt{2}} e_2)$. Man argumentiert wie in Teil (b).

√ (e) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Ja, mit $\mathcal{B} = (e_1, \frac{1}{\sqrt{2}i} e_2)$. Man argumentiert wie in Teil (b).

8. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte auf $\mathbb{K}^2$ die quadratische Form $Q(x,y) = xy$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$, sodass für die Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y})$ von (x,y) bezüglich $\mathcal{B}$ gilt

$\checkmark$ (a) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Ja. Betrachte die Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$[I_{\mathbb{K}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$[Q]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Nein. Vergleiche die Signaturen $(1,1)$ (erkennt man aus der ersten Antwort) und $(2,0)$.

$\checkmark$ (c) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Ja, wie oben.

$\checkmark$ (d) $Q(x,y) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Ja. Betrachte die Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$[I_{\mathbb{K}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$[Q]_{\mathcal{B}} = \left([I_{\mathbb{K}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}\right)^T [Q]_{\mathcal{E}_2} [I_{\mathbb{K}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2} = I_2$$

und folglich

$$[(x,y)]_{\mathcal{B}} [Q]_{\mathcal{B}} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

9. *Prüfung Winter 2018:* Jede Bilinearform auf einem reellen Vektorraum definiert ein inneres Produkt.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Ein inneres Produkt ist positiv definit. Die Nullabbildung ist aber eine Bilinearform, die (im Falle $\dim(V) > 0$) nicht positiv definit ist. Die Aussage ist im Allgemeinen also falsch.

10. *Prüfung Winter 2018:* Jedes innere Produkt auf einem reellen Vektorraum definiert eine Bilinearform.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Jedes innere Produkt ist per definitionem bilinear und auf reellen Vektorräumen also insbesondere bilinear.

11. *Prüfung Winter 2018:* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist $\operatorname{tr}(A) > 0$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Da A symmetrisch, positiv definit ist, existiert nach dem ersten Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q, sodass $A = QDQ^T$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist. Da die Spur eine Klassenfunktion ist, gilt $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) > 0$.

12. *Prüfung Winter 2018:* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist A^{-1} auch positiv definit.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Da A symmetrisch, positiv definit ist, existiert nach dem ersten Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q, sodass $A = QDQ^T$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist. Es folgt $A^{-1} = QD^{-1}Q^T$ und da D^{-1} eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist, folgt die positive Definitheit von A^{-1}.

13. *Prüfung Sommer 2017:* Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. Die Darstellungsmatrix von Q ist genau dann invertierbar, wenn sie positiv oder negativ definit ist.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Sei $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die quadratische Form gegeben durch $Q(x, y) = x^2 - y^2$. Die zugehörige Darstellungsmatrix ist gegeben durch $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und invertierbar, da eine Involution. Die Matrix ist quadratische Form ist aber weder positiv noch negativ definit, da $e_1^T Ae_1 = 1 > 0$ und $e_2^T Ae_2 < 0$.

14. *Prüfung Sommer 2017:* Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Dann ist $A + B$ positiv definit.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$v^T(A + B)v = v^T(Av + Bv) = v^TAv + v^TBv.$$

Da die Summe zweier positiver Zahlen positiv ist, ist also $A + B$ positiv definit.

15. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Dann ist die Abbildung $V \mapsto V^*$, $v \mapsto \beta(v, \cdot)$ ein Isomorphismus.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Siehe die Lösung zu Aufgabe 3c auf Serie 21.

16. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|_\infty^2 = \max\{|v_i|; 1 \leq i \leq n\}^2$$

ist eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Abbildung ist zwar homogen vom Grad 2, aber die Abbildung

$$\beta : (v, w) \mapsto \frac{1}{2}\big(\|v + w\|_\infty^2 - \|v\|_\infty^2 - \|w\|_\infty^2\big)$$

ist nicht bilinear, denn

$$\begin{aligned}
\beta(e_2, e_1) &= \frac{1}{2}\big(\|e_1 + e_2\|_\infty^2 - \|e_2\|_\infty^2 - \|e_1\|_\infty^2\big) = -\frac{1}{2}, \\
\beta(-e_1, e_1) &= \frac{1}{2}\big(\|0\|_\infty^2 - \|e_1\|_\infty^2 - \|e_1\|_\infty^2\big) = -1, \\
\beta(e_2 - e_1, e_1) &= \frac{1}{2}\big(\|e_2\|_\infty^2 - \|e_2 - e_1\|_\infty^2 - \|e_1\|_\infty^2\big) = -\frac{1}{2} \neq -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$