MC-Serie 23

Sylvesters Trägheitssatz & Singulärwertzerlegung

Einsendeschluss: 29.04.2018 23:59

1. Die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform ist symmetrisch.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Sei $\beta \in BF(V)$ eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann ist per definitionem

$$\psi_{\mathcal{B}}(\beta)_{ij} = \beta(v_i, v_j) = \beta(v_j, v_i) = \psi_{\mathcal{B}}(\beta)_{ji}.$$

2. Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Falls im Körper $2 \neq 0$ gilt, dann ist die Aussage richtig, wie in der Vorlesung bewiesen. Ein Gegenbeispiel über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wurde ebenfalls in der Vorlesung präsentiert.

3. Die Summe zweier symmetrischer bilinearformen ist eine symmetrische Bilinearform.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das wurde in Aufgabe 2 von Serie 8 bewiesen.

4. Je zwei symmetrische Matrizen mit demselben charakteristischen Polynom sind Darstellungsmatrizen derselben Bilinearform.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Das charakteristische Polynom von A ist $X^2 - 1$ und somit besitzt A den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$. Wenn die Aussage richtig wäre, dann wären A und I_2 Darstellungsmatrizen derselben Bilinearform und insbesondere kongruent. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass A nicht kongruent ist zu einer Diagonalmatrix und somit insbesondere nicht zur Identität.

5. Die Singulärwerte eines linearen Operators sind mit seinen Eigenwerten identisch

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Dann wissen wir, dass $-A$ orthogonal diagonalisierbar ist, mit strikt negativen Diagonaleinträgen. Insbesondere sind alle Eigenwerte negativ. Da die Singulärwerte alle nichtnegativ sind, stimmt kein Singulärwert von $-A$ mit einem Eigenwert von A überein.

6. Die Singulärwerte der Matrix A sind identisch mit den Eigenwerten der Matrix AA^T.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Sei A symmetrisch, positiv definit, dann sind die Singulärwerte von A die Eigenwerte von A, wie in Aufgabe 2 gezeigt wurde. Die Eigenwerte von $AA^T = A^2$ sind nach dem ersten Spektralsatz aber genau die quadrierten Eigenwerte von A. Somit liefert beispielsweise die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ ein Gegenbeispiel.

7. Sei A eine symmetrische Matrix, und sei λ ein Eigenwert von A. Dann ist λ ein Singulärwert von A.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Siehe MC-Aufgabe 5.

8. *Prüfung Sommer 2017:* Jede symmetrische, positiv definite Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige Quadratwurzel $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, d.h. $A^2 = B$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

A wird erst durch die Bedingungen symmetrisch, positiv definit eindeutig bestimmt. Ein Gegenbeispiel liefert die Matrix I_n, für welche gilt $I_n = I_n^2 = (-I_n)^2$.