D-MATH/D-PHYS | Lineare Algebra I/II | HS 2017/FS 2018

Dr. Meike Akveld

MC-Serie 26

Sesquilinearformen und $\mathbb{C}$-Skalarprodukte

Einsendeschluss: 20.5.2018 23:59

1. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, dann ist die Abbildung $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto u^T Av$ eine Sesquilinearform.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Sei also $A \neq 0$, dann existiert ein $u \in \mathbb{C}^n$, sodass $u^T A \neq 0$ gilt, und somit ist $u^T Av \neq 0$ für $v = (u^T A)^T$ wegen der Positivität des standard komplexen inneren Produkts auf $\mathbb{C}^n$. Andererseits ist

$$(\mathrm{i}u)^T Av = \mathrm{i}u^T Av \neq -\mathrm{i}u^T Av,$$

da nach Voraussetzung $u^T Av \neq 0$.

Bemerkung: wenn $A = 0$ ist, dann ist $(u, v) \mapsto u^T Av$ eine Sesquilinearform. Insbesondere ist also die Abbildung $(u, v) \mapsto u^T Av$ genau dann eine Sesquilinearform, wenn $A = 0$ ist.

2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V, d.h. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dann gilt:

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : \ v = \lambda w.$$

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Angenommen $\dim(V) \geq 1$, wähle ein $v \in V \setminus \{0\}$. Dann ist $\|v\| \neq 0$, und für $w := -v$ gilt

$$0 = \|0\| = \|v + w\| \neq 2\|v\| = \|v\| + \|w\|.$$

3. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\Phi : V \to V^*$, $\Phi(v)(w) = \langle v, w \rangle$ ein Isomorphismus.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Abbildung ist *konjugiert linear*, d.h. $\Phi(\lambda v) = \overline{\lambda}\Phi(v)$ für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit ist Φ kein Isomorphismus von Vektorräumen, da nicht linear.

4. Sei V ein komplexer Vektorraum. Ein inneres Produkt auf V ist insbesondere eine Bilinearform auf V.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf V. Falls $\dim(V) \geq 1$ ist, dann existiert $v \in V$ mit $\langle v, v \rangle \neq 0$. Es ist nach Vorraussetzung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Sesquilinearform und folglich

$$\langle \mathrm{i}v, v \rangle = \overline{i} \langle v, v \rangle = -\mathrm{i}\langle v, v \rangle \neq \mathrm{i}\langle v, v \rangle$$

und also $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht linear in der ersten Komponente. Insbesondere definiert $\langle \cdot, \cdot \rangle$ keine Bilinearform.

5. Für welche der folgenden Matrizen ist die zugehörige Sesquilinearform hermitesch?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3+\mathrm{i} \\ 2 & \mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$

√ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4+\mathrm{i} & 7 \\ 4-\mathrm{i} & -\pi & -2-8\mathrm{i} \\ 7 & -2+8\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 1-\mathrm{i} \\ 4 & 2 & 3 \\ -1+\mathrm{i} & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die zugehörige Sesquilinearform genau dann hermitesch ist, wenn die Matrix hermitesch ist, sprich $A^* = A$. Das heisst $A_{ji} = \overline{A_{ij}}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Insbesondere ist $A_{ii} \in \mathbb{R}$ und deshalb die erste Matrix nicht hermitesch. Die zweite Matrix ist tatsächlich hermitesch. Die dritte Matrix ist nicht hermitesch, da $\overline{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i} \neq -1+\mathrm{i}$.

6. Die Menge der hermiteschen Matrizen

$$\mathrm{H} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

ist ein Unterraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Matrix I_n ist symmetrisch und reell, also insbesondere hermitesch. Wenn die Menge der hermiteschen Matrizen ein Unterraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ wäre, dann wäre auch $\mathrm{i}I_n$ hermitesch und dies impliziert

$$\mathrm{i}I_n = (\mathrm{i}I_n)^* = -\mathrm{i}I^* = -\mathrm{i}I_n.$$

Es folgt $2\mathrm{i}I_n = 0$, aber das ist absurd.

7. Die Dimension des Unterraums

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^T = A\}$$

des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ beträgt

(a) n^2.

(b) $n(n+1)$.

√ (c) $\frac{n(n+1)}{2}$.

(d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

Eine Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn $A_{ij} = A_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Sei $E_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (1 \leq k, l \leq n)$$

und definiere $F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ für $1 \leq i \leq j \leq n$. Die Menge $\{F_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ ist linear unabhängig. Sei nämlich

$$0 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \alpha_{ij} F_{ij} = \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_{ii} E_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}(E_{ij} + E_{ji}),$$

dann folgt für alle $1 \leq k < l \leq n$, dass

$$0 = \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_{ii}(E_{ii})_{kl} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}(E_{ij} + E_{ji})_{kl} = \alpha_{kl}$$

sowie im Falle $k = l$, dass

$$0 = 2\alpha_{kl}$$

und es folgt, dass die Koeffizienten α_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$ verschwinden.

Wir behaupten zudem, dass die Menge $\{F_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ den Vektorraum der symmetrischen Matrizen erzeugt. Hierfür berechnet man für symmetrisches $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
A = \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}E_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} A_{ij}E_{ij} + \sum_{1\leq j<i\leq n} A_{ij}E_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} A_{ij}E_{ij} + \sum_{1\leq j<i\leq n} A_{ji}E_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} A_{ij}E_{ij} + \sum_{1\leq i<j\leq n} A_{ij}E_{ji} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ii}}{2}F_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} A_{ij}F_{ij}
\end{aligned}$$

und somit erzeugt die Menge den Vektorraum der symmetrischen Matrizen. Da die Menge linear unabhängig ist, bildet sie eine Basis. Also ist

$$\dim\big(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\big) = |\{F_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}| = \frac{n(n+1)}{2}.$$

8. Die Dimension des Unterraums

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^T = A\}$$

des $\mathbb{R}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ beträgt

(a) n^2.

√ (b) $n(n+1)$.

(c) $\frac{n(n+1)}{2}$.

(d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

Gegeben $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, seien $\mathrm{Re}(A), \mathrm{Im}(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$\mathrm{Re}(A)_{ij} = \mathrm{Re}(A_{ij}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(A)_{ij} = \mathrm{Im}(A_{ij}).$$

Da die Transposition linear ist, gilt

$$A^T = \mathrm{Re}(A)^T + \mathrm{i}\mathrm{Im}(A)^T.$$

Da A genau dann symmetrisch ist, wenn $A_{ij} = A_{ji}$ gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$, und da $A_{ij} = A_{ji}$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{Re}(A_{ij}) = \mathrm{Re}(A_{ji})$ und $\mathrm{Im}(A_{ij}) = \mathrm{Im}(A_{ji})$ gelten, ist A genau dann symmetrisch, wenn $\mathrm{Re}(A)$ und $\mathrm{Im}(A)$ symmetrisch sind. Andererseits ist wieder wegen Linearität der Transposition $A_1 + \mathrm{i}A_2$ symmetrisch für alle symmetrischen $A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Insbesondere ist die Abbildung

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}),\ (A_1, A_2) \mapsto A_1 + \mathrm{i}A_2$$

ein Isomorphismus, da wie argumentiert surjektiv und linear, aber auch sicherlich injektiv. Somit ist

$$\dim_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\big) = 2\dim\big(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})\big) = n(n+1),$$

wobei wir zur Berechnung von $\dim\big(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})\big)$ genau dasselbe Argument wie in Aufgabe 7 verwenden.

9. Die Dimension des Unterraums der hermiteschen Matrizen

$$\mathrm{H} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

von $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ beträgt

√ (a) n^2.

(b) $n(n+1)$.

(c) $\frac{n(n+1)}{2}$.

(d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

Gegeben $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, definiere $\mathrm{Re}(A)$ und $\mathrm{Im}(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ durch

$$\mathrm{Re}(A)_{ij} = \mathrm{Re}(A_{ij}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(A)_{ij} = \mathrm{Im}(A_{ij}).$$

Es ist $A = \mathrm{Re}(A) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(A)$ und

$$A^* = \mathrm{Re}(A)^T - \mathrm{i}\mathrm{Im}(A)^T,$$

sodass $A^* = A$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{Re}(A)$ symmetrisch und $\mathrm{Im}(A)$ schiefsymmetrisch ist. Im Folgenden sei $W_1 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ der Unterraum der symmetrischen und $W_2 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ der Unterraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

Angenommen $B \in W_1 \cap W_2$, dann ist $-B = B^T = B$ und somit $B_{ij} = -B_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Insbesondere also $B_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und folglich ist $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Andererseits ist für jede Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Matrix $B_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(B + B^T)$ symmetrisch und $B_{\mathrm{skew}} = \frac{1}{2}(B - B^T)$ schiefsymmetrisch und wegen $B = B_{\mathrm{sym}} + B_{\mathrm{skew}}$ folgt $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

Definiere $\Phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to H$ durch $\Phi(B) = B_{\mathrm{sym}} + \mathrm{i}B_{\mathrm{skew}}$. Dann ist Φ sicherlich linear. Die Abbildung ist surjektiv, wie oben argumentiert wurde, und injektiv, da $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ genau dann die Nullmatrix ist, wenn $\mathrm{Re}(A) = 0$ und $\mathrm{Im}(A) = 0$ gelten. Also ist $H \cong M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und somit $\dim(H) = n^2$.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein komplexer Vektorraum. Für jede hermitesche Form $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ gilt $\gamma(u,u) \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Für jede hermitesche Form γ auf V und für alle $u, v \in V$ gilt per definitionem

$$\overline{\gamma(v,u)} = \gamma(u,v),$$

und somit insbesondere

$$\overline{\gamma(u,u)} = \gamma(u,u).$$

Da $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} | \overline{z} = z\}$ ist, folgt die Behauptung.

11. *Prüfung Winter 2018:* Für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$ und für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $u^*Av = (u^*Av)^T$.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Die Aussage ist wahr, da Transposition auf $\mathbb{C} = M_{1\times 1}(\mathbb{C})$ mit der Identität übereinstimmt.

12. *Prüfung Winter 2018:* Sei V ein komplexer Vektorraum. Für jede Sesquilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ gilt $\forall u \in V : \gamma(u,u) \in \mathbb{R}$.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Sei $\gamma : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(s,t) = \mathrm{i}\overline{s}t$. Dann ist γ eine Sesquilinearform, aber es gilt $\gamma(1,1) = \mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.