MC-Serie 25

Jordan Normalform (Teil 2)

Einsendeschluss: 13.5.2018 23:59

1. Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3\mathrm{i} \\ -3\mathrm{i} & 6 \end{smallmatrix}\right)$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\mathrm{char}_A(X) = (X-3)^2$. Man berechnet

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3\mathrm{i} \\ -3\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} -3 & -3\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $\mathrm{Rang}(A - 3I_2) = 1$. Insbesondere ist also $1 = \dim(E_3) < \dim(K_3) = 2$ und folglich ist A nicht diagonalisierbar.

2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von T. Dann ist v ein verallgemeinerter Eigenvektor von T.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

v ist ein Eigenvektor, falls ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, sodass $(T - \lambda I_V)(v) = 0$. Insbesondere existieren also ein $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $(T - \lambda I_V)^k(v) = 0$. Letzteres definiert einen verallgemeinerten Eigenvektor.

3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls $\dim(V) < \infty$, dann besitzt T eine Jordan Normalform.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ist, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Als gegenbeispiel betrachte die Rotationsmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{smallmatrix}\right)$. Wenn der Endomorphismus $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ eine Jordan Normalform besitzt, dann besitzt L_A einen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$. Da das charakteristische Polynom von A keine reellen Nullstellen besitzt, hat L_A aber keinen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$. Wenn der Körper $\mathbb{K}$ *algebraisch abgeschlossen* ist, d.h. wenn jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, dann besitzt jeder Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ eine Jordan Normalform. Dies gilt beispielsweise für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, was in der Analysis bewiesen wurde.

4. Jeder Zyklus von verallgemeinerten Eigenvektoren ist eine geordnete, linear unabhängige Menge.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das wurde in §9.2, Theorem 6 bewiesen.

5. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$, und sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Zyklus von verallgemeinerten Eigenvektoren von T zum Eigenwert λ.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Betrachte $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Abbildung $L_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$. Dann definieren (e_1, e_2) und $(-e_1, -e_2)$ zwei verschiedene Zyklen zum Eigenwert 1.

Ein weiteres Beispiel liefert die Identität I_2, wo (e_1) und (e_2) unterschiedliche Zyklen zum gleichen Eigenwert sind, oder das Beispiel $B = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit A wie oben, wo (e_1, e_2) und (e_3) zwei unterschiedliche Zyklen verschiedener Länge zum gleichen Eigenwert definieren.

In der Vorlesung haben wir ein Beispiel einer 7×7-Matrix gesehen, wo der Eigenwert 2 zwei verschiedene Zyklen der Längen 1 und 3 besitzt.

6. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $n = \dim(V)$, und sei $T \in \operatorname{End}(V)$, sodass $\operatorname{char}_T(X)$ in Linearfaktoren zerfällt. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T. Dann ist $K_\lambda = \operatorname{Ker}((T - \lambda I_V)^n)$.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $K_\lambda = \operatorname{Ker}((T - \lambda I_V)^{m_\lambda(T)})$ ist, wobei $m_\lambda(T)$ die algebraische Multiplizität von λ bezüglich T ist. Somit folgt aus $m_\lambda(T) \leq n = \deg \operatorname{char}_T(X)$, dass $K_\lambda \in \operatorname{Ker}((T - \lambda I_V)^n)$. Andererseits wissen wir, dass $V = \bigoplus_{\mu \in \sigma(T)} K_\mu$ und dass $(T - \lambda I_V)(w) \in K_\mu \setminus \{0\}$ für alle $w \in K_\mu$ mit $\mu \neq \lambda$. Für $v \notin K_\lambda$ existieren eindeutige $(v_\mu)_{\mu \in \sigma(T)}$, sodass

$$v = \sum_{\mu \in \sigma(T)} v_\mu$$

und es ist

$$(T - \lambda I_V)^n(v) = \sum_{\mu \in \sigma(T)} (T - \lambda I_V)^n(v_\mu) = \sum_{\mu \in \sigma(T) \setminus \{\lambda\}} (T - \lambda I_V)(v_\mu) \neq 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass für $\mu \neq \lambda$ gilt $(T - \lambda I_V)^n(v) \neq 0$ und dass wegen der Direktheit der Summe die $(T - \lambda I_V)^n(v_\mu)$, $\mu \neq \lambda$, paarweise linear unabhängig sind.

7. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und sei $W \subseteq V$ gegeben durch

$$W = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I_V)^k(v) = 0\}.$$

Dann ist $T - \lambda I_V\big|_W$ nilpotent.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Da $\dim(V) < \infty$, gilt $\dim(W) < \infty$ und da für alle $v \in W$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(T|_W - \lambda I_W)^k v = \big((T - I_V)|_W\big)^k v = 0$, existiert eine Basis $S \subseteq W$ von W und ein $K \in \mathbb{N}$, sodass $\big((T - I_V)|_W\big)^K v = 0$ für alle $v \in S$. Insbesondere ist also $\big((T - I_V)|_W\big)^k = 0$ und somit gilt die Aussage.

8. *Prüfung Sommer 2017:* Hat eine 3×3 Matrix A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachkeit 3, so gilt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Da λ geometrische Vielfachheit 3 besitzt, ist A ähnlich zur Matrix λI_3. Da λI_3 mit allen anderen 3×3-Matrizen kommutiert, gilt $A = \lambda I_3$.

9. *Prüfung Sommer 2017:* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ ein Operator endlicher Ordnung, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $T^k = I_V$ ist. Dann ist T diagonalisierbar.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Aussage gilt nur, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Das typische Gegenbeispiel ist die Rotation um $\frac{\pi}{2}$ in der Ebene.

10. *Prüfung Winter 2018:* Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$.

(a) Richtig.

√ (b) False.

Das charakteristische Polynom von A ist $\mathrm{char}_A(X) = (1-X)^2$ und somit ist 1 der einzige Eigenwert von A. Wenn A diagonalisierbar wäre, dann wäre A ähnlich zu I_2, aber I_2 ist nur zu sich selber ähnlich. Die Aussage ist also falsch, da A weder über $\mathbb{R}$ noch über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.