MC-Serie 10

Elementare Zeilenumformungen & Elementarmatrizen, Rang & Inverse einer Matrix

Einsendeschluss: 3.12.2017 23:59

1. Welche der folgenden Matrizen sind Inverse von $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ über $\mathbb{Q}$?

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

√ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus Aufgaben 2a und 2b von Serie 8 folgt, dass $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Inverse von $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

2. Der Rang der linearen Abbildung L_A für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

√ (d) 3

(e) 4

Wir berechnen

$$A \xrightarrow{Z_1 - Z_4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - 2Z_4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_4 - \frac{1}{2}S_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4 - S_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $-\frac{3}{2}e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^4$ (die Erzeuger des Bildes der resultierenden Matrix) sind linear unabhängig und da elementare Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang erhalten, ist folglich $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

3. Bestimmen Sie den Rang der Matrix A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

(a) 0

(b) 1

√ (c) 2

(d) 3

(e) 4

Wir berechnen

$$A \xrightarrow{Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{S_2 - S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren $(1,0,0,0)^T$ und $(0,1,2,3)^T$ sind linear unabhängig, denn

$$0 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

und da elementare Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang erhalten, ist folglich $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

4. Für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA)$.

(a) richtig

$\checkmark$ (b) falsch

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat Rang 1, aber $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat Rang 0.

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Was ist der Rang der Matrix A?

(a) 4 für beliebige Werte von k.

(b) 3 für beliebige Werte von k.

(c) 2, falls $k = \pm 1$, und 4 sonst.

√ (d) 3, falls $k = \pm 1$, und 4 sonst.

(e) 3, falls $k = 1$, und 4 sonst.

Falls $k = 1$, dann ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4 + 3S_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = &\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

und da elementare Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang einer Matrix erhalten, ist folglich $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

Falls $k = -1$, dann ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 + S_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und wieder gilt für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
0 =& \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -2\lambda_3 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow& \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

und da elementare Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang erhalten, ist $\text{Rang}(A) = 3$.

Sei also $k \neq \pm 1$ und seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
0 =& \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 \\ (k+1)\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ (k-1)\lambda_4 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow& \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0
\end{aligned}$$

da $k+1, k-1 \neq 0$. Folglich ist $\text{Rang}(A) = 4$.

6. *Prüfung Winter 2017:* Die Transponierte einer Elementarmatrix ist wieder eine Elementarmatrix.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Transposition führt Zeilen- in Spaltenoperationen über, und somit Elementarmatrizen in Elementarmatrizen. Sei beispielsweise A eine Matrix und E die Matrix der Form "Addition des λ-fachen der i-ten zur j-ten Zeile, das heisst, EA entsteht aus A durch Addition der i-ten zur j-ten Zeile, dann entsteht $A^T E^T$ aus A^T durch Addition der i-ten Spalte zur j-ten Spalte. Dies gilt für alle Matrizen A zulässiger Dimension und somit ist E^T eine Elementarmatrix. Die anderen Typen überprüft man analog.

7. *Prüfung Winter 2017:* Sei $A \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ mit $n > 1$. Dann ist es möglich, dass $\mathrm{Rang}(AB) = n$.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Wie in dieser Serie gezeigt, gilt $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$, $\mathrm{Rang}(B) \leq 1$ und somit $\mathrm{Rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\} \leq 1 < n$.

8. *Prüfung Winter 2017:* Die Elementarmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zusammen mit der Matrixmultiplikation bilden eine Gruppe.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Das Produkt zweier Elementarmatrizen ist im Allgemeinen keine Elementarmatrix. Betrachte das Beispiel Addition der ersten zur zweiten Zeile gefolgt von Multiplikation der ersten Zeile mit 2. Angewandt auf I_2 liefert das die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, die keine Elemetarmatrix ist, da jede Elementarmatrix entweder Einträge alle 1 oder 0 hat (Typ I), eine Diagonalmatrix ist (Typ II), oder Diagonaleinträge gleich 1 hat (Typ III).

9. *Prüfung Winter 2017:* Für eine quadratische Matrix A gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Rang}\left(A^n\right) \geq \mathrm{Rang}\left(A^{n+1}\right).$$

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Es ist wie in dieser Serie gezeigt

$$\mathrm{Rang}(A^{n+1}) \leq \min\{\mathrm{Rang}(A^n), \mathrm{Rang}(A)\} \leq \mathrm{Rang}(A^n).$$

10. *Prüfung Winter 2017:* Seien $A, B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA).$$

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wir wissen aus Serie 8, dass AB und BA und somit L_{AB} und L_{BA} invertierbar sind. Insbesondere sind L_{AB} und L_{BA} surjektiv, sprich $\mathrm{Rang}(L_{AB}) = n = \mathrm{Rang}(L_{BA})$ und somit folgt auch $\mathrm{Rang}(AB) = n = \mathrm{Rang}(BA)$.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Der Rang einer oberen Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Der Rang der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist 1, die Anzahl der von 0 verschiedenen Einträge auf der Diagonalen ist 0.

12. *Prüfung Sommer 2017:* Eine Matrix ist genau dann nicht invertierbar wenn Zeilenrang $\neq$ Spaltenrang.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Bei jeder Matrix stimmen Spalten- und Zeilenrang überein, was in der Vorlesung gezeigt wurde. Es gibt aber nicht-invertierbare Matrizen (beispielsweise $0 \in M_{1\times 1}(\mathbb{F}_2)$).