MC-Serie 18

Reelle innere Produkte, Normen und Gram-Schmidt Orthogonalisierung

Einsendeschluss: 18.03.2018 23:59

1. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann ist jede Teilmenge paarweise orthogonaler Vektoren linear unabhängig.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Teilmenge $\{0\}$ ist eine Teilmenge paarweise orthogonaler Vektoren, aber sicher nicht linear unabhängig.

2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann ist jede orthonormale Teilmenge linear unabhängig.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das wurde in der Vorlesung bewiesen.

3. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$. Wenn $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$, dann ist $v = w$.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Betrachte $\mathbb{R}^3$ mit dem standard inneren Produkt sowie die drei orthogonalen vektoren e_1, e_2, e_3 der Standardbasis. Es gilt $\langle e_1, e_2 \rangle = 0 = \langle e_1, e_3 \rangle$, aber $e_2 \neq e_3$. Die Folgerung aus der Frage gilt nur dann, wenn die Gleichheit für alle $u \in V$ erfüllt ist.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v \in V$, sodass $\|u+v\| = 2$ und $\|u-v\| = \sqrt{8}$. Dann ist

√ (a) $\langle u, v\rangle = -1$

(b) $\langle u, v\rangle = 4$

(c) $\langle u, v\rangle = -4$

(d) $\langle u, v\rangle = \sqrt{2}$

(e) $\langle u, v\rangle = 0$

Wir erinnern an die Parallelogrammgleichung:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big).$$

Andernfalls zeigt man direkt

$$\begin{aligned} 4 =& \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ 8 =& \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$4 = -4\langle u, v\rangle.$$

5. Welche der folgenden Vorschriften definieren innere Produkte auf den entsprechenden $\mathbb{R}$-Vektorräumen?

(a) $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac - bd$ auf $\mathbb{R}^2$

Die Vorschrift ist nicht positiv definit, denn $\langle (1,1),(1,1)\rangle = 0$.

(b) $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A+B)$ für $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Die Vorschrift ist nicht linear im ersten Argument. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist

$$\langle 2A, A\rangle = \mathrm{tr}(3A) = 3 \neq 4 = 2\mathrm{tr}(2A) = 2\langle A, A\rangle.$$

(c) $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p'(x)q(x)\mathrm{d}x$ für $p, q \in \mathbb{R}[X]$, wobei p' die Polynomfunktion nach formaler Ableitung von p ist.

Die Vorschrift ist nicht positiv, da $\langle 1, 1\rangle = 0$.

√ (d) Keine der obigen Möglichkeiten

6. *Prüfung Winter 2017:* Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $S \subset V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = S$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Für jede Menge $X \subseteq V$ ist $X^\perp$ ein Unterraum. Die Menge S aus der Fragestellung ist nicht unbedingt ein Unterraum.

7. *Prüfung Winter 2017:* Sei V ein euklidischer Vektorraum, sei W ein Unterraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls W T-invariant ist, dann ist $W^\perp$ auch T-invariant.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Sei $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $W = \mathbb{R}e_1$ ein T-invarianter Unterraum, aber $W^\perp = \mathbb{R}e_2$ ist nicht T-invariant, da $Te_2 = e_1 + e_2 \notin W^\perp$.