MC-Serie 1

Logik und Mengenlehre

Einsendeschluss: 07.10.2017 23:59

1. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$(P \setminus Q)^c = Q \setminus P$$

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Betrachte das Beispiel $X = \{1, 2, 3\}$ mit Teilmengen $P = \{1, 2\}$ und $Q = \{2, 3\}$. Dann sind $P \setminus Q = \{1\}$ und $Q \setminus P = \{3\}$, also gilt

$$(P \setminus Q)^c = \{2, 3\} \neq \{3\} = Q \setminus P$$

2. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$\mathcal{P}(\{\}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\}))$$

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die leere Menge hat nur eine Teilmenge, nämlich die leere Menge, also ist $\mathcal{P}(\{\}) = \{\{\}\}$ eine Menge, die genau ein Element – die leere Menge – enthält. Eine Menge, die nur ein Element enthält, hat genau zwei Teilmengen: die leere Menge und die Menge, die dieses einzige Element enthält, also gilt $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\})) = \{\{\}, \{\{\}\}\}$.

3. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$$

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Betrachte $(-1,-1) \in \mathbb{R}^2$.

4. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$P \setminus (Q \setminus R) = (P \cup R) \setminus Q$$

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Seien τ, σ Elemente einer Menge und $\tau \neq \sigma$. Sei $P = \{\tau, \sigma\}$, $Q = \{\tau\}$, $R = \{\tau, \sigma\}$. Dann ist $Q \setminus R = \{\}$, also $P \setminus (Q \setminus R) = \{\tau, \sigma\}$. Andererseits $P \cup R = \{\tau, \sigma\}$ und folglich $(P \cup R) \setminus Q = \{\sigma\}$.

5. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$P \setminus (Q \setminus R) = (P \setminus Q) \cup R$$

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Seien τ, σ Elemente einer Menge und $\tau \neq \sigma$. Sei $P = \{\tau\}$, $Q = \{\tau\}$, $R = \{\sigma\}$. Dann ist $Q \setminus R = \{\tau\}$, also $P \setminus (Q \setminus R) = \{\}$. Andererseits $P \setminus Q = \{\}$ und also $(P \setminus Q) \cup R = \{\sigma\}$.

6. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$P \setminus (Q \setminus R) = (P \setminus Q) \cup (Q \cap R)$$

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Seien τ, σ Elemente einer Menge und $\tau \neq \sigma$. Sei $P = \{\tau\}$, $Q = \{\tau, \sigma\}$, $R = \{\sigma\}$. Dann ist $Q \setminus R = \{\tau\}$, also $P \setminus (Q \setminus R) = \{\}$. Andererseits $P \setminus Q = \{\}$ und $Q \cap R = \{\sigma\}$, folglich $(P \setminus Q) \cup (Q \cap R) = \{\sigma\}$.

7. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$$P \setminus (Q \setminus R) = (P \setminus Q) \cup (P \cap Q \cap R)$$

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

"$\supset$" Seien X, Y Teilmengen von U, dann $X \setminus Y = X \cap Y^c$. Also folgt $P \setminus Q \subset P \setminus (Q \setminus R)$ aus $Q^c \subset (Q \setminus R)^c$. Das zeigt Wenn $x \in Q \cap R$, dann ist $x \notin Q \setminus R$ und also folgt aus $x \in P \cap Q \cap R$ auch $x \in P \setminus (Q \setminus R)$.

"$\subset$" Sei $x \in P \setminus (Q \setminus R)$ und $x \notin P \setminus Q$. Aus der ersten Annahme folgt $x \in P$ und aus der zweiten folgt $x \in Q$, also $x \in P \cap Q$. Da $x \notin Q \setminus R$ und $x \in Q$, gilt zudem $x \in Q \cap R$ und also $x \in P \cap Q \cap R$. Dies beweist

$$P \setminus (Q \setminus R) \subset (P \setminus Q) \cup (P \cap Q \cap R)$$