D-MATH/D-PHYS Lineare Algebra I HS 17

Dr. Meike Akveld

MC-Serie 2 – Abbildungen, Relationen, Mächtigkeit

Einsendeschluss: 07.10.2017 23:59

1. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\surd$ (a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

$\surd$ (b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

$\surd$ (d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(e) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$

$\surd$ (f) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Siehe [1, pp. 164f.]

2. Welche der folgenden Aussagen über die Mächtigkeiten von Mengen sind richtig?

$\checkmark$ (a) $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden Zahlen sind gleichmächtig.

$\checkmark$ (b) $\mathbb{N}$ und die Menge der Primzahlen sind gleichmächtig.

(c) $\{0,1\}^5$ und $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ sind gleichmächtig.

(d) $\{0,1\}^2$ und $\{a,b\}$ sind gleichmächtig.

$\checkmark$ (e) $\{0,1\}^3$ und $\{1,2,\ldots,8\}$ sind gleichmächtig.

(b). Wir konstruieren eine bijektive Abbildung der Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ auf die natürlichen Zahlen. Eine injektive Abbildung existiert per definitionem von $\mathbb{P}$. Um eine surjektive Abbildung zu finden, müssen wir insbesondere zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Zuerst stellen wir fest, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ein $p \in \mathbb{P}$ existiert, so dass $p \mid n$. Die Aussage stimmt für die Zahl $n = 2$. Sei die Aussage also bewiesen für alle natürlichen Zahlen $2 \leq k \leq n$. Wir wollen sie für $n+1$ zeigen. Falls $n+1 \in \mathbb{P}$, dann sind wir fertig. Sei also $n+1 \notin \mathbb{P}$. Dann existiert per definitionem eine natürliche Zahl $2 \leq k \leq n$ so dass $k \mid n$, d.h. $n+1 = lk$ für ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 2$. Per Annahme hat k einen Primteiler, i.e. es gibt $p \in \mathbb{P}$ mit $k = pm$ für ein $m \in \mathbb{N}$, also $n+1 = pml$ und also $p \mid n+1$, was zu beweisen war. Sei nun $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{P}$ eine beliebige, endliche Teilmenge. Betrachte die Zahl $q := p_1 \cdots p_n + 1$, dann gilt $p_i \nmid q$ für alle $1 \leq i \leq n$. Allerdings hat q wie vorher gezeigt einen Primteiler, also existiert ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$ und da die $p_1, \ldots, p_n$ beliebig waren, gibt es keine endliche Menge, die alle Primzahlen enthält. Sei nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ p_n die n-te Primzahl, i.e. es gibt genau $n-1$ Primzahlen p so dass $p < p_n$, und definiere eine Abbildung $\psi : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ durch $p_n \mapsto n$. Diese Abbildung ist injektiv und surjektiv.

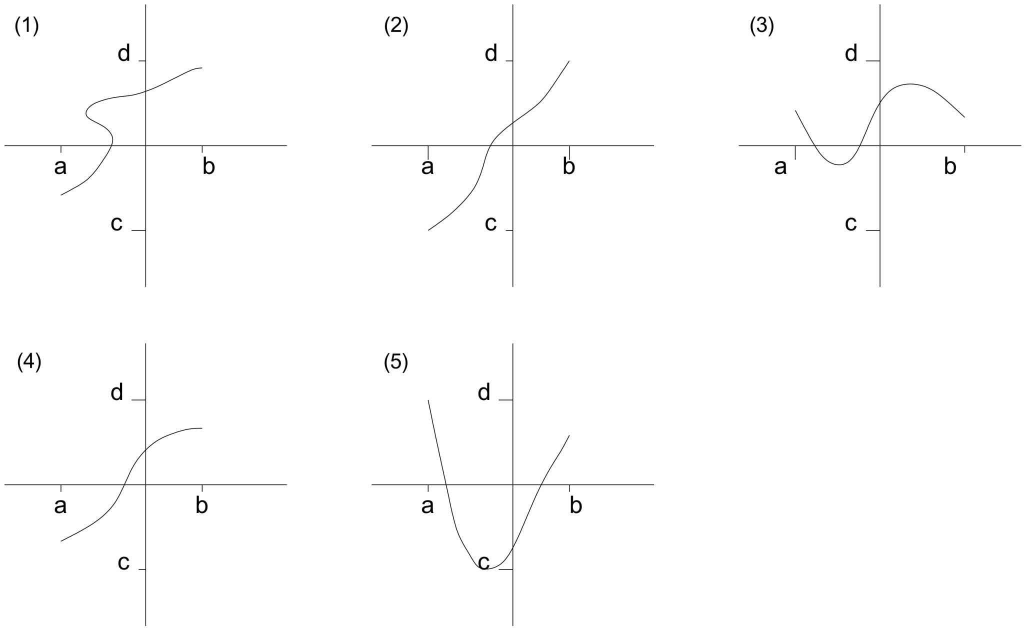

Figure 1: Bilder zu MC-Aufgabe 3.

3. Welche der Bilder in Abbildung 1 sind Graphen einer injektiven bzw. surjektiven Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$?

(a) 1 ist injektiv

√ (b) 2 ist injektiv

(c) 3 ist injektiv

√ (d) 4 ist injektiv

(e) 5 ist injektiv

(f) 1 ist surjektiv

√ (g) 2 ist surjektiv

(h) 3 ist surjektiv

(i) 4 ist surjektiv

√ (j) 5 ist surjektiv

Um diese Aufgabe zu beantworten, sollte man sich klar machen, was die Begriffe "injektiv" und "surjektiv" für den Graphen einer Funktion bedeuten.

Sei $f : [a,b] \to [c,d]$ eine Abbildung, wir definieren den Graphen von f durch

$$\Gamma_f := \{\big(x, f(x)\big) \mid x \in [a,b]\} \subseteq [a,b] \times [c,d]$$

Seien $\pi_2 : [a,b] \times [c,d] \to [c,d]$ die Projektion auf die zweite Koordinate, i.e. $\pi_2(s,t) = t$ für alle $a \leq s \leq b$ und alle $c \leq t \leq d$. Dann ist f injektiv genau dann, wenn $|\Gamma \cap \pi_2^{-1}\{t\}| \leq 1$ für alle $c \leq t \leq d$ und f ist surjektiv genau dann, wenn $\pi_2(\Gamma) = [c,d]$.

4. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

√ (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist injektiv.

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist surjektiv.

References

[1] H. Schichl und R. Steinbauer, Einführung in das mathematische Arbeiten, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.