MC-Serie 11

Lineare Gleichungssysteme, Gauss-Elimination & LR-Zerlegung

Einsendeschluss: 10.12.2017 23:59

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

in $M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$. Dann existiert $U \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$, so dass $UA = B$ und

(a) U eine obere Dreiecksmatrix ist.

√ (b) U eine untere Dreiecksmatrix ist.

(c) U eine Permutationsmatrix ist.

(d) U nicht-invertierbar ist.

Mittels Subtraktion der ersten von der dritten Zeile und darauffolgender Addition des 3/2-fachen der zweiten zur dritten Zeile, lässt sich A in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

überführen. Diese Matrix ist invertierbar, da eine Dreieckmatrix mit von null verschiedenen Einträgen auf der Diagonalen.

Man sieht, dass

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:U} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

und wegen Invertierbarkeit von A ist $U = BA^{-1}$ mit der Eigenschaft $UA = B$ eindeutig.

2. Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 4x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

$\checkmark$ (c) Für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & | & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & | & b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & -3 & | & b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

Das LGS ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b)$, also gibt es genau dann eine Lösung, wenn $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

3. Das durch die erweiterte Matrix definierte lineare Gleichungssystem

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

hat

√ (a) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

(c) genau den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(d) keine Lösung.

(e) Keine der anderen genannten Möglichkeiten ist korrekt.

Die Koeffizientenmatrix A zum LGS ist invertierbar, da eine obere Dreiecksmatrix mit von null verschiedenen Einträgen auf der Diagonalen. Somit besitzt das LGS genau eine Lösung. Diese findet man sofort durch Rückwärtseinsetzen, indem man zuerst $x_3 = 6$ abliest, und dann daraus x_2 und schliesslich x_1 berechnet.

4. Für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^T$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

√ (a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern

Man verwendet elementare Zeilenumformungen, um die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ in folgende Form zu bringen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\mathrm{Rang}(A) \neq \mathrm{Rang}(A \mid b)$ und folglich ist das LGS nicht lösbar.

5. Für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$

(a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

√ (c) eine Lösungsmenge mit 1 freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit 2 freien Parametern

Man verwendet elementare Zeilenumformungen, um die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ in folgende Form zu bringen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\mathrm{Rang}(A) = 2$ und folglich ist die Dimension des Lösungsraumes $\mathcal{L}$ die Dimension des Kerns von L_A und also $\dim \mathcal{L} = \mathrm{nullity}(L_A) = 3 - \mathrm{Rang}(L_A) = 1$.

6. Seien A, B $m \times n$-Matrizen. Dann ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\}$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

(a) Falsch.

√ (b) Richtig.

Beachte $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid (A - B)x = 0\} = \mathrm{Ker}(L_{A-B})$

7. Die Lösungsmenge eines Systems von m linearen Gleichungen in n Unbekannten ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

Das stimmt nur für homogene Gleichungen. Im allgemeinen Fall ist die Lösungsmenge ein affiner Raum.

8. *Prüfung Winter 2017:* Das inhomogene System $AX = b$ habe mindestens zwei Lösungen. Dann ist der Kern von L_A mindestens zweidimensional.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Betrachte das inhomogene lineare Gleichungssystem in zwei Variablen in $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1.$$

$x = (x_1, x_2)$ ist genau dann eine Lösung, wenn $x_1 = 1$ ist. Insbesondere besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = 1$ die unendliche Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Kern der Matrix A ist aber $\langle e_2 \rangle$ und somit eindimensional.

9. *Prüfung Winter 2017:* Sei $(A'|b')$ entstanden aus $(A|b)$ durch eine endliche Folge von elementaren Spaltenumformungen. Dann sind die Systeme $(A'|b')$ und $(A|b)$ äquivalent.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Wir wissen wir, dass für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und für alle $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ gilt $\mathrm{Ker}(AG) = G^{-1}\mathrm{Ker}(A)$. Es reicht also, eine elementare Spaltenoperation G und eine Matrix A zu finden, sodass $\mathrm{Ker}(A) \neq G^{-1}\mathrm{Ker}(A)$ gilt. Wir wählen $m = 1$, $n = 2$, $A = (1 \;\; 0)$ und als elementare Spaltenumformung G die Vertauschung der ersten und der zweiten Spalte. Dann ist $\mathrm{Ker}(A) = \langle e_2\rangle$ und $\mathrm{Ker}(AG) = \langle e_1\rangle$. Insbesondere sind $(A|0)$ und $(AG|0)$ nicht äquivalent.

10. *Prüfung Winter 2017:* Sei A eine $n \times n$ Matrix von Rang n. Dann ist die Zeilenstufennormalform von A die Identitätsmatrix I_n.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Da A vollen Rang besitzt, ist A invertierbar. Insbesondere sind die Spalten von A linear unabhängig. Somit enthält jede Spalte der Zeilenstufennormalform von A eine Pivot-Stelle (da ansonsten die Spalte eine Linearkombination der vorangehenden Spalten ist). Insbesondere bilden die Spalten der Zeilenstufennormalform die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Da die Zeilenstufennormalform eine obere Dreiecksmatrix ist, ist dies die Identität.

11. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $m < n$. Dann besitzt das System $Ax = 0$ nicht-triviale Lösungen.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Es ist $\mathcal{L}_{Ax=0} = \mathrm{Ker}(A)$ und es gilt nach der Dimensionsformel sowie Serie 10

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{Rang}(A) \geq n - \min\{m, n\} = n - m \geq 1.$$

Somit ist $\mathcal{L}_{Ax=0} \neq \{0\}$.

12. *Prüfung Sommer 2017:* Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 2$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Man berechnet

$$A \xrightarrow[Z_3-3Z_1]{Z_2-2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-3Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix enthält genau zwei linear unabhängige Zeilen, und da elementare Zeilenumformungen den Rang invariant lassen, hat A also Rang 2. Es folgt

$$\dim \mathrm{Ker}(L_A) = 4 - \mathrm{Rang}(A) = 2.$$