MC-Serie 24

Orthogonale Abbildungen, Jordan Normalform (Teil 1)

Einsendeschluss: 6.5.2018 23:59

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Dann ist T entweder eine Rotation oder eine Reflexion.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Abbildung $-I_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Abbildung ist sicher orthogonal, da sie bezüglich der (orthonormalen) Standardbasis die symmetrische Darstellungsmatrix $-I_3$ mit der Eigenschaft $(-I_3)^2 = I_3$ besitzt. Auf jedem orthogonalen Komplement eines Unterraums W von $\mathbb{R}^3$ gilt $-I_{\mathbb{R}^3}|_{W^\perp} = -I_{W^\perp}$ und da das orthogonale Komplement eines Unterraums W der Dimension kleiner gleich 2 strikt positive Dimension besitzt, ist $-I_{W^\perp} \neq I_{W^\perp}$ für alle solchen W. Somit kann $-I_{\mathbb{R}^3}$ weder eine Reflexion noch eine Rotation sein.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein zweidimensionaler Euklidscher Vektorraum. Die Komposition zweier Rotationen auf V ist eine Rotation.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Da V zweidimensional ist und da die orthogonale Gruppe eine Gruppe ist, wissen wir aus Aufgaben 1 und 2, dass die Komposition zweier Rotationen entweder eine Rotation oder eine Reflexion ist. Da die Determinante der Komposition zweier Rotationen das Produkt der Determinanten der Rotationen ist, folgt aus dem zweiten Teil von Aufgabe 2a, dass die Komposition zweier Rotationen Determinante 1 hat und somit eine Rotation ist.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein dreidimensionaler Euklidscher Vektorraum. Dann ist das Produkt zweier Rotationen auf V eine Rotation auf V.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Die Komposition $T = T_1T_2$ zweier Rotationen T_1, T_2 auf V besitzt nach Aufgabe 4b bezüglich einer ONB eine Darstellungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist also

$$1 = \det(T_1)\det(T_2) = \det(T_1T_2) = \det(T) = \lambda$$

und somit ist $\lambda = 1$. Die Darstellungsmatrix ist also die Darstellungsmatrix einer Rotation.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein vierdimensionaler Euklidscher Vektorraum. Dann ist die Komposition zweier Rotationen eine Rotation.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Matrix $-I_4$ ist die Darstellungsmatrix der Komposition von Rotationen T_1, T_2, wobei

$$[T_1]_{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \, [T_2]_{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

Man argumentiert wie in MC-Aufgabe 1, dass $-I_4$ nicht die Darstellungsmatrix einer Rotation ist.

5. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Dann ist die Identität eine Rotation.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Dies ist Teil der Definition von Rotationen.

6. Sei $(V, \langle, \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Die Komposition zweier Reflexionen auf V ist eine Reflexion.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Sei $V = \mathbb{R}$, dann ist die einzige Reflexion auf V die Abbildung gegeben durch $T(1) = -1$. Es ist $T^2(1) = 1$ und somit $T^2 \neq T$. Insbesondere ist T keine Reflexion.

Da die Identität keine Reflexion ist, gilt dasselbe Argument auf Euklidschen Vejtorräumen beliebiger Dimension.

7. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Dann ist T eine Komposition von Rotationen.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Betrachte $V = \mathbb{R}$ und die Reflexion definiert durch $T(1) = -1$ auf V. Dann ist $\det(T) = -1$ und somit ist T keine Komposition von Rotationen, da Rotationen Determinante 1 haben und somit auch alle Kompositionen von Rotationen.

8. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei T ein orthognaler Endomorphimus auf V und sei $\det(T) = -1$. Dann ist T eine Reflexion.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Siehe MC-Aufgabe 1.

9. Jede Reflexion eines endlichdimensionalen Euklidschen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Reflexionen sind sogar orthogonal diagonalisierbar. Sei nämlich v ein normierter Vektor in einem endlichdimensionalen Euklidschen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und sei T die Reflexion auf V mit $T(v) = -v$ und $T|_{\{v\}^\perp} = I_{\{v\}^\perp}$. Wähle eine ONB $(v_2, \dots, v_n)$ von $\{v\}^\perp$. Mit $v_1 = v$ ist dann $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ nach Voraussetzung eine ONB von V und

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist eine Diagonalmatrix.

10. Jede Rotation eines endlichdimensionalen Euklidschen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Rotation gegeben durch $e_1 \mapsto e_2$ und $e_2 \mapsto -e_1$. Dies entspricht der Rotation um $\frac{\pi}{2}$ in der Ebene (gegen den Uhrzeigersinn). Die Darstellungsmatrix dieser Abbildung T ist

$$[T]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich hat T das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_T(X) = X^2 + 1.$$

Dieses Polynom hat keine reellen Nullstellen und somit hat T keinen (reellen) Eigenwert.

11. *Prüfung Winter 2017:* Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V und sei $\det(T) = -1$. Dann ist T eine Reflexion.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Abbildung $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ist orthogonal, hat Determinante -1, besitzt aber keinen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Insbesondere ist die Aussage also falsch.