Dr. Meike Akveld

MC-Serie 19

Gram-Schmidt Orthogonalisierung, adjungierte Abbildungen

Einsendeschluss: 25.03.2018 23:59

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $S \subseteq V$. Dann ist $S^\perp$ ein Unterraum von V.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das wurde in Aufgabe 1 gezeigt.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist W das orthogonale Komplement eines Unterraums von V.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wie in Aufgabe 1 diskutiert, gilt $W = (W^\perp)^\perp$. Da $W^\perp \subseteq V$ ein Unterraum ist, folgt die Aussage.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $S \subseteq V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = \operatorname{span}(S)$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wie in Aufgabe 1 gezeigt wurde, ist $\left(\operatorname{span}(S)^\perp\right)^\perp = \operatorname{span}(S)$ und $S^\perp = \operatorname{span}(S)^\perp$. Also gilt die Aussage.

4. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist $\mathrm{nullity}(T) + \mathrm{nullity}(I_V - T) = \dim(V)$.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Für ein Gegenbeispiel betrachten wir $V = \mathbb{R}^2$ und die Abbildung $T = L_A$ für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\mathrm{nullity}(T) = 0$. Wegen $I_{\mathbb{R}^{\neq}} - L_A = L_{I_2} - L_A = L_{I_2 - A}$ gilt unter Verwendung der Dimensionsformel $\mathrm{nullity}(I_{\mathbb{R}^2} - T) = 2 - \mathrm{Rang}(I_2 - A) = 1$, denn $I_2 - A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\mathrm{nullity}(T) + \mathrm{nullity}(I_{\mathbb{R}^2} - L_A) = 1$ und die Aussage somit falsch.

5. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $A^4 = 0$. Dann ist 0 der einzige Eigenwert von A.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Nach Voraussetzung ist $L_A^4 = L_{A^4} = 0$ und somit nilpotent. Wir haben in Serie 3 gezeigt, dass also 0 der einzige Eigenwert von L_A ist, und da $A = [L_A]_{\mathcal{E}_n}$ ist somit 0 die einzige Nullstelle von $\mathrm{char}_{L_A}(X) = \det(A - XI_n)$, und also auch der einzige Eigenwert von A.

6. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq V$ zwei Orthonormalbasen von V. Dann existiert $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $T(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das folgt – unabhängig von der Euklidischen Struktur und der Orthonormalität der Basen aus der Tatsache, dass für jede Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V (wobei $n = \dim(V)$) sowie beliebige $w_1, \ldots, w_n \in V$ genau ein $T \in \mathrm{End}(V)$ existiert, sodass gilt $T(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

7. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls $T^*T = 0$ gilt, dann ist $T = 0$.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wir schliessen aus Aufgabe 4, dass $0 = \mathrm{Rang}(T^*T) = \mathrm{Rang}(T)$. Da $\{0\}$ der einzige Unterraum von V mit Dimension 0 ist, folgt $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$ und folglich $T = 0$.

8. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls $TT^* = 0$ gilt, dann ist $T = 0$.

$\checkmark$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wir schliessen aus Aufgabe 4, dass $0 = \mathrm{Rang}(TT^*) = \mathrm{Rang}(T^*)$. Da $\{0\}$ der einzige Unterraum von V mit Dimension 0 ist, folgt $\mathrm{Im}(T^*) = \{0\}$ und folglich $T^* = 0$. Insbesondere gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle = 0$$

und da $T(v)$ durch die Abbildung $w \mapsto \langle T(v), w \rangle$ eindeutig bestimmt ist, folgt $T(v) = 0$. Da $v \in V$ beliebig war, ist schliesslich $T = 0$.

9. *Prüfung Sommer 2017:* Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $S \subset V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = S$.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Wir haben gezeigt, dass das orthogonale Komplement einer Menge ein Unterraum ist. Falls also S kein Unterraum ist, dann ist $S \subsetneq (S^\perp)^\perp$. Beispielsweise ist $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = ((\mathbb{R} \setminus \{0\})^\perp)^\perp$.

10. *Prüfung Sommer 2017:* Es gibt eine Basis (u_1, u_2) von $\mathbb{R}^2$ mit dem standard inneren Produkt, sodass $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ und $\langle u_1, u_2\rangle = 1$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Angenommen (u_1, u_2) ist eine solche Basis, dann ist insbesondere $u_1 - u_2 \neq 0$ und somit ist $\|u_1 - u_2\| > 0$. Sei $\alpha = \|u_1 - u_2\|$. Aus den Voraussetzungen folgt

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle \\ &= \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 - 2\langle u_1, u_2\rangle = 0.\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

Bemerkung: Wir werden später Darstellungsmatrizen von Bilinearformen einführen. Aus der Positivität des inneren Produktes folgt, dass die Determinante einer Darstellungsmatrix eines inneren Produktes nicht verschwindet. Andererseits wäre $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ unter den gemachten Annahmen eine Darstellungsmatrix des inneren Produktes, im Widerspruch zur Positivität.

11. *Prüfung Winter 2018:* Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei T ein Endomorphismus auf V. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Sei $T = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, dann ist $T^* = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ und beide haben genau einen Eigenvektor. e_1 ist ein Eigenvektor von T, aber $T^*e_1 = e_1 + e_2$ und somit ist e_1 kein Eigenvektor von T^*. Die Aussage ist also falsch.