MC-Serie 4

Vektorräume, Unterräume, Linearkombinationen und Erzeugendensysteme

Einsendeschluss: 22.10.2017 23:59

1. In jedem Vektorraum V gilt $av = bv \implies a = b$ für $a, b \in K, v \in V$

(a) richtig

√ (b) falsch

Sei $v = 0_V$, dann ist $av = 0_V$ für alle $a \in K$.

2. In jedem Vektorraum V gilt $av = aw \implies v = w$ für $a \in K, v, w \in V$

(a) richtig

√ (b) falsch

Sei $a = 0$, dann ist $av = 0_V$ für alle $v \in V$.

3. Versehen Sie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition "+" und skalarer Multiplikation "$\cdot$":

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 b_2)\\ c \cdot (a_1, a_2) &:= (ca_1, a_2)\end{aligned}$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für alle $c \in \mathbb{R}$. Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Das neutrale Element bezüglich + ist $(0, 1)$. Dann hat aber $(0, 0)$ keine additive Inverse.

4. Sei K ein Körper und versehen Sie $K \times K$ mit komponentenweiser Addition und einer skalaren Multiplikation "$\cdot$":

$$c \cdot (a_1, a_2) := (a_1, 0)$$

für alle $(a_1, a_2) \in K \times K$ und für alle $c \in K$. Mit diesen Verknüpfungen ist $K \times K$ ein Vektorraum über K.

(a) Wahr

$\checkmark$ (b) Falsch

Sei $a_2 \neq 0$ und a_1 beliebig, dann gilt

$$1 \cdot (a_1, a_2) = (a_1, 0) \neq (a_1, a_2).$$

im Widerspruch zu VR 5.

5. Sei K ein beliebiger Körper. Definiere auf $K \times K$ eine Addition durch komponentenweise Addition und eine skalare Multiplikation

$$\forall (a_1, a_2) \in K \times K \forall c \in K : c \cdot (a_1, a_2) := \begin{cases} (0,0) & \text{falls } c = 0 \\ (ca_1, c^{-1}a_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit diesen Verknüpfungen ist $K \times K$ ein Vektorraum über K.

(a) Wahr

$\checkmark$ (b) Falsch

Wähle als Körper den Körper $\mathbb{Q}$. Dort gilt

$$\left(0, \frac{1}{5}\right) = 5 \cdot (0,1) = (2+3) \cdot (0,1) \neq 2 \cdot (0,1) + 3 \cdot (0,1) = \left(0, \frac{5}{6}\right)$$

Also definieren die Verknüpfungen keine $\mathbb{Q}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, und folglich gilt die Aussage nicht für beliebige Körper.

6. *(Optional)* Welche der folgenden Teilmengen $W \subseteq V$ sind Unterräume?

√ (a) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{v \in V \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (0, x, 2x, 3x)\}$

Sicherlich ist $(0,0,0,0) \in W$. Seien $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt für $z := \lambda y$ und $t := x - \lambda y$

$$(0, x, 2x, 3x) - \lambda(0, y, 2y, 3y) = (0, x, 2x, 3x) - (0, z, 2z, 3z) = (0, t, 2t, 3t) \in W$$

Bemerkung: Der Unterraum W ist eine Gerade in $\mathbb{R}^4$ durch den Ursprung.

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{v \in V \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (x, x^2, x^3, x^4)\}$

Man bemerke, dass $v := (1,1,1,1) \in W$, aber $v + v = (2,2,2,2) \notin W$.

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{v \in V \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : x > y \wedge v = (x, y, 0, 0)\}$

$(0,0,0,0) \notin W$, also ist W kein Unterraum.

(d) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper,

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}).$$

und

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

Die Matrix $0_V := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist der Nullvektor in $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$. Aber $0_V \notin W$. Also ist W kein Unterraum.

√ (e) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper,

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}).$$

und

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

Sicherlich $0_V \in W$. Seien $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda\alpha & b - \lambda\beta \\ c - \lambda\gamma & a - \lambda\alpha \end{pmatrix} \in W$$

Also ist W ein Unterraum.

(f) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper,

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}).$$

und

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}$$

$0_V \notin W$, also ist W kein Unterraum.

7. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\{\} \subseteq V$ ist ein Unterraum.

$0_V \notin \{\}$, also ist $\{\}$ kein Unterraum.

(b) V enthält einen Unterraum $W \subseteq V$ mit $W \neq V$.

Angenommen $V = \{0_V\}$, und $W \subseteq V$ mit $W \neq V$, dann ist $W = \{\}$. Also ist W kein Unterraum. Also hat V in diesem Falle keinen Unterraum W so dass $W \neq V$.

$\surd$ (c) Keine der Aussagen ist richtig.

8. *(Optional)* Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen versehen mit der Addition

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

√ (a) $W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Unterraum.

Die Nullfolge 0_V, bei der alle Glieder gleich 0 sind, ist das neutrale Element bezüglich Addition und sicherlich $0_V \in W$. Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $a - \lambda \cdot b = (a_n - \lambda b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Annahme existieren N_a und N_b in $\mathbb{N}$, so dass $a_n = 0$ für alle $n \geq N_a$ und $b_n = 0$ für alle $n \geq N_b$. Sei $N := \max\{N_a, N_b\}$, dann gilt $a_n - \lambda b_n = 0$ für alle $n \geq N$, und folglich ist $a - \lambda \cdot b \in W$. Also ist W ein Unterraum.

(b) $W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 1\}$ ist ein Unterraum.

$0_V \notin W$, also ist W kein Unterraum.

√ (c) $W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid 2 \mid n \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Unterraum.

Sicherlich ist $0_V \in W$. Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $a - \lambda \cdot b = (a_n - \lambda b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $2 \mid n$, dann ist $a_n = b_n = 0$ nach Annahme und folglich $a_n - \lambda b_n = 0$. Also ist $a - \lambda \cdot b \in W$ und folglich W ein Unterraum.

(d) Keine der Aussagen ist wahr.

9. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien U_1, U_2 Unterräume. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Unterräume?

$\surd$ (a) $U_1 \cap U_2$

Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

(b) $U_1 \cup U_2$

$U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$. Vgl. Aufgabe 1b.

(c) $U_1 \setminus U_2$

$0_V \in U_2 \Rightarrow 0_V \notin U_1 \setminus U_2$ und folglich ist $U_1 \setminus U_2$ kein Unterraum.

$\surd$ (d) $\{0_V\}$

Sicherlich $0_V \in \{0_V\}$. Seien $u, v \in \{0_V\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist $u = 0_V = v = \lambda \cdot v$ und folglich $u - \lambda \cdot v = 0_V \in \{0_V\}$. Also ist $\{0_V\}$ ein Unterraum.