

Lösung 1: Logik und Mengenlehre

1. a) Es ist per definitionem

$$\begin{aligned} (P^c)^c &= \{x \in X \mid x \notin P^c\} = \{x \in X \mid \neg(x \in P^c)\} \\ &= \{x \in X \mid \neg(x \notin P)\} = \{x \in X \mid \neg(\neg(x \in P))\} \\ &= \{x \in X \mid x \in P\} = P \end{aligned}$$

b) • Wir erstellen wieder die Wahrheitstabellen und entnehmen die Äquivalenz der Aussagen den Tabellen 1 und 2.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w

Tabelle 1: Wahrheitstabelle für $\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A) \vee (\neg B)$.

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	w	f	f
f	w	w	w	f	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Tabelle 2: Wahrheitstabelle für $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

- Wir beginnen mit der ersten Aussage $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$:
 “ \subset ” Sei $x \notin P \cap Q$, dann ist $x \notin P$ oder $x \notin Q$, also $x \in P^c$ oder $x \in Q^c$,
 folglich $x \in P^c \cup Q^c$.

Bitte wenden!

“ \supset ” Sei $x \in P^c \cup Q^c$, dann ist $x \in P^c$ oder Q^c , also ist $x \notin P$ oder $x \notin Q$ und folglich $x \notin P \cap Q$. Dies zeigt $x \in (P \cap Q)^c$.

Wir zeigen die zweite Aussage $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$:

“ \subset ” Sei $x \notin P \cup Q$, dann ist $x \notin P$ und $x \notin Q$, also $x \in P^c$ und $x \in Q^c$, folglich $x \in P^c \cap Q^c$.

“ \supset ” Sei $x \in P^c \cap Q^c$, dann ist $x \in P^c$ und Q^c , also ist x weder in P , noch in Q und folglich $x \notin P \cup Q$. Dies zeigt $x \in (P \cup Q)^c$.

- c) • Wir erstellen die Wahrheitstabellen, und folgern aus den Tabellen 3 und 4 bzw. 5 und 6, dass die Behauptungen gelten.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

Tabelle 3: Wahrheitstabelle für $(A \vee B) \wedge C$.

A	B	C	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	f
w	f	w	w	f	w
w	f	f	f	f	f
f	w	w	f	w	w
f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	f

Tabelle 4: Wahrheitstabelle für $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

- Seien $P, Q \subset X$, dann gilt $P \subset P \cup Q$. Diese einfache Beobachtung wird im folgenden mehrfach verwendet.

Zuerst beweisen wir

$$(P \cup Q) \cap R = (P \cap R) \cup (Q \cap R)$$

“ \subset ” Sei $x \in (P \cup Q) \cap R$, also gilt einerseits $x \in R$ und andererseits $x \in P$ oder $x \in Q$. Falls $x \in P$, dann ist also $x \in P \cap R$ und insbesondere

Siehe nächstes Blatt!

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
f	w	f	f	f
f	f	w	f	w
f	f	f	f	f

Tabelle 5: Wahrheitstabelle für $(A \wedge B) \vee C$.

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f
f	f	w	w	w	w
f	f	f	f	f	f

Tabelle 6: Wahrheitstabelle für $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

$x \in (P \cap R) \cup (Q \cap R)$. Wenn $x \in Q$, dann ist $x \in Q \cap R$ und ebenso $x \in (P \cap R) \cup (Q \cap R)$.

“ \supset ” Sei $x \in (P \cap R) \cup (Q \cap R)$. Falls $x \in P \cap R$, dann ist $x \in R$ und $x \in P \subset P \cup Q$ und folglich $x \in (P \cup Q) \cap R$. Analog argumentiert man, wenn $x \in Q \cap R$ ist.

Als nächstes zeigen wir, dass

$$(P \cap Q) \cup R = (P \cup R) \cap (Q \cup R)$$

“ \subset ” Sei $x \in (P \cap Q) \cup R$, also $x \in R$ oder $x \in P \cap Q$. Falls $x \in R$, dann gelten $x \in R \subset P \cup R$ und $x \in R \subset Q \cup R$ und folglich $x \in (P \cup R) \cap (Q \cup R)$. Wenn $x \in P \cap Q$, dann $x \in P \subset P \cup R$ und $x \in Q \subset Q \cup R$, also folglich ebenfalls $x \in (P \cup R) \cap (Q \cup R)$.

“ \supset ” Sei $x \in (P \cup R) \cap (Q \cup R)$ und nehmen wir an, dass $x \notin R$. Dann folgt aus $x \in P \cup R$, dass $x \in P$ und aus $x \in Q \cup R$ dass $x \in Q$. Insbesondere $x \in P \cap Q$ und also $x \in (P \cap Q) \cup R$. Falls $x \in (P \cup R) \cap (Q \cup R)$ und $x \notin P \cap Q$, dann folgt aus dem ersten Teil des obigen Arguments, dass $x \in R$. Also gilt ebenso $x \in (P \cap Q) \cup R$.

2. Es gilt $A \downarrow A \iff \neg A$, wie man Tabelle 7 entnimmt.

Bitte wenden!

A	A	$A \downarrow A$	$\neg A$
w	w	f	f
f	f	w	w

Tabelle 7: Wahrheitstabelle zu $A \downarrow A$ und $\neg A$.

Tabelle 8 entnehmen wir, dass $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \iff A \vee B$.

A	B	$A \vee B$	$A \downarrow B$	$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$
w	w	w	f	w
w	f	w	f	w
f	w	w	f	w
f	f	f	w	f

Tabelle 8: Wahrheitstabelle zu $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$ und $A \vee B$.

Und schliesslich entnehmen wir Tabelle 9, dass $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) \iff A \wedge B$.

A	B	$A \wedge B$	$A \downarrow A$	$B \downarrow B$	$(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	f

Tabelle 9: Wahrheitstabelle zu $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$ und $A \wedge B$.

3. a) “ \implies ”: Wir zeigen die Kontraposition. Sei also $P \not\subset Q$, d.h. es existiert ein $x \in P$ mit $x \notin Q$. Dann ist wegen $P \cap Q \subset Q$ insbesondere auch $x \notin P \cap Q$ und folglich $x \in P \setminus (P \cap Q)$. Dies zeigt $P \not\subset P \cap Q$ und somit insbesondere $P \neq P \cap Q$.

“ \impliedby ”: Sei $P \subset Q$. Wir wissen, dass $P \cap Q \subset P$. Das heisst, es reicht zu zeigen, dass $P \subset P \cap Q$. Sei also $x \in P$, dann gilt $x \in Q$ wegen $P \subset Q$. Folglich gilt $x \in P \wedge x \in Q$ und somit per definitionem $x \in P \cap Q$.

- b) Wir zeigen die erste Aussage:

“ \subset ”: Da $P \subset P$ und $Q \cap P \subset P$ gilt auch $P \cup (Q \cap P) \subset P$.

“ \supset ”: Da $P \subset P \cup R$ für alle Mengen R , folgt insbesondere $P \subset P \cup (Q \cap P)$.

Für die zweite Aussage verwenden wir Teilaufgabe a). Da $P \subset (Q \cup P)$, folgt demnach $P \cap (Q \cup P) = P$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Der naive Ansatz liefert das Bild in Abbildung 1. Man sieht, dass das Venn-Diagramm 13 disjunkte Schnittmengen liefert. Die in einem vollständigen Venn Diagramm ge-

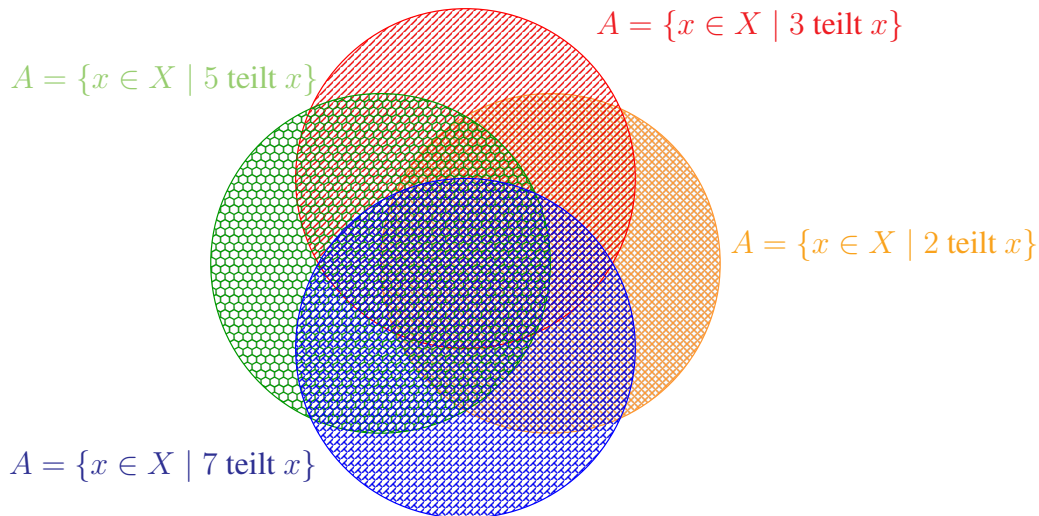


Abbildung 1: Naives Venn-Diagramm für 4 Teilmengen.

suchten disjunkten Teilmengen sind von der Form

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid T_2(x) \wedge T_3(x) \wedge T_5(x) \wedge T_7(x)\},$$

wobei $T_p(x)$ eine Aussage von der Form “ p teilt x ” oder “ p teilt x nicht” ist. Insgesamt gibt es also $2^4 = 16$ solche disjunkten Teilmengen, bzw. in $A \cup B \cup C \cup D$ deren 15. Dies illustriert, dass das Venn-Diagramm keine vollständige Beschreibung von $A \cup B \cup C \cup D$ im gewünschten Sinne liefert. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass die Mengen $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ und } 5 \text{ teilen } x \text{ nicht}\}$ sowie $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ und } 7 \text{ teilen } x \text{ nicht}\}$ fehlen.

Es ist durchaus möglich, vollständige Venn-Diagramme für mehr als drei Mengen zu zeichnen, wenn man andere Formen zulässt. Es ist allerdings schwierig, festzustellen, für wieviele Mengen das funktioniert und welche Mengen man verwenden muss. Beispiele und weiterführende Information finden Sie hier: <http://www.ams.org/notices/200611/ea-wagon.pdf>.

5. Sei $C \neq \{\}$, und sei $c \in C$ beliebig. Angenommen es gibt ein $a \in A$ so dass $a \notin B$. Da $A \times C = B \times C$ ist, gilt $(a', c) \in B \times C$ für alle $a' \in A$. Insbesondere ist $(a, c) \in B \times C$ und somit $a \in B$ nach Definition des direkten Produkts. Das ist absurd. Es folgt $a \in B$ für alle $a \in A$, beziehungsweise $A \subset B$. Da $A \neq B$ existiert

Bitte wenden!

also $b \in B$ mit $b \notin A$. Wegen $A \times C = B \times C$ gilt $(b, c) \in A \times C$ und also $b \in A$. Widerspruch. Wir haben gezeigt

$$C \neq \{\} \wedge A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$$

und es folgt die Behauptung.

Literatur

- [1] Hermann Schichl and Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Verlag, 2012.