Lösung 2:
Relationen, Abbildungen, Mächtigkeit

1. Gegeben $n, m \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$m \mid n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = km$$

Wir sagen m teilt n. Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist gerade, genau dann wenn $2 \mid n$.

a) Gegeben $n \in \mathbb{Z}$ gilt $n - n = 0$ und also ist $\equiv$ reflexiv (da 0 gerade ist).
Angenommen $2 \mid n - m$, dann $n - m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und also $m - n = -2k = 2(-k)$, so dass $2 \mid m - n$. Das zeigt

$$n \equiv m \Rightarrow m \equiv n$$

und somit ist $\equiv$ symmetrisch.
Angenommen $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ so dass $n_1 \equiv n_2$ und $n_2 \equiv n_3$, und seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ so dass

$$n_i - n_{i+1} = 2k_i \quad i = 1, 2$$

Dann gilt

$$n_1 - n_3 = (n_1 - n_2) + (n_2 - n_3) = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$$

Es gilt also $2 \mid n_1 - n_3$ und da n_1, n_2, n_3 beliebig waren, folgt die Transitivität von $\equiv$.
Seien $[0] \subset \mathbb{Z}$ und $[1] \subset \mathbb{Z}$ die Restklassen von 0 und 1. Da $1 \not\equiv 0$, gilt $[1] \cap [0] = \{\}$. Sei nun $n \in \mathbb{Z}$, dann ist entweder n gerade, in welchem Falle $n \equiv 0$, oder n ist ungerade, also $n \equiv 1$. Tatsächlich sei $k = \max\{l \in \mathbb{Z} \mid 2l \leq n\}$, dann folgt aus $2 \nmid n$, dass $2k < n$, und aus der Maximalität von k, dass $2(k+1) > n$, also

$$2k < n < 2k + 2$$

und folglich $n = 2k + 1$, bzw. $n \equiv 1$. Es gilt also $[0] \sqcup [1] = \mathbb{Z}$ – wobei $\sqcup$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet – und somit ist

$$(\mathbb{Z}/\equiv) = \{[0], [1]\}$$

b) Die resultierende Relation ist keine äquivalenzrelation, da sie zwar symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv ist. Für $n, m \in \mathbb{Z}$ ist wegen Teil (a) $n - m$ ungerade genau dann, wenn $n - m = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Aber $n - n = 0$ und also wäre die neue Relation nicht reflexiv. Sie wäre symmetrisch, da

$$m - n = -(2k + 1) = 2(-k) + (1 - 2) = 2(-k - 1) + 1$$

Transitivität wäre ebenfalls nicht erfüllt. Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ so dass

$$n_i - n_{i+1} = 2k_i + 1 \quad i = 1, 2$$

dann folgt

$$n_1 - n_3 = (n_1 - n_2) + (n_2 - n_3) = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2 + 2)$$

und also $2 \mid n_1 - n_3$.

c) Die Vorgehensweise ist dieselbe wie für die Relation $\equiv$ von oben. Da $n \mid 0$, gilt $m \sim_n m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und folglich ist die Relation reflexiv.
Sei $m - l = kn$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $m \sim_n l$, dann gilt $l - m = -kn = (-k)n$ und also $n \mid l - m$, i.e. $l \sim_n m$. Somit ist $\sim_n$ symmetrisch.
Seien wieder $m_1, m_2, m_3, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ so dass

$$m_i - m_{i+1} = k_i n \quad i = 1, 2$$

Dann folgt

$$m_1 - m_3 = (m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) = (k_1 + k_2)n$$

und folglich $m_1 \sim_n m_2, m_2 \sim_n m_3 \Rightarrow m_1 \sim_n m_3$.

d) Seien $[0], \ldots, [n - 1]$ die Restklassen von $0, \ldots, n - 1$. Seien $0 \leq k < l < n$, dann ist $0 \leq l - k < n$ und folglich $n \nmid l - k$, d.h. $[k] \cap [l] = \{\}$. Sei $l \in \mathbb{Z}$ beliebig und sei $k := \max\{l \in \mathbb{Z} \mid kn \leq l\}$. Per definitionem gilt

$$kn \leq l < kn + n$$

beziehungsweise $0 \leq l - kn < n$, also $l - kn = m$ für ein $0 \leq m < n$ und also $l \sim_n m$, und da $l \in \mathbb{Z}$ beliebig war folgt

$$\mathbb{Z}/\sim_n = \{[m] \mid 0 \leq m < n\}$$

2. **a)** Sei $x \in X$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\min\{\chi_P(x), \chi_Q(x)\} = 1 &\iff \chi_P(x) = 1 \wedge \chi_Q(x) = 1 \\
&\iff x \in P \wedge x \in Q \ (\iff \chi_{P \cap Q}(x) = 1) \\
&\iff \chi_P(x) = 1 \wedge \chi_Q(x) = 1 \\
&\iff \chi_P(x)\chi_Q(x) = 1.
\end{aligned}$$

Da $\chi_{P \cap Q}$, $\chi_P \cdot \chi_Q$ und $\min\{\chi_P, \chi_Q\}$ nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, stimmen die Abbildungen alle punktweise überein.

Siehe nächstes Blatt!

b) Sei $x \in X$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\max\{\chi_P(x), \chi_Q(x)\} = 1 &\iff \chi_P(x) = 1 \vee \chi_Q(x) = 1 \\
&\iff x \in P \vee x \in Q \ (\iff \chi_{P\cup Q}(x) = 1) \\
&\iff \chi_P(x) = 1 \vee \chi_Q(x) = 1 \\
&\iff (\chi_P(x) = 1 \wedge \chi_Q(x) = 1) \\
&\qquad \vee (\chi_P(x) = 1 \,\mathrm{XOR}\, \chi_Q(x) = 1) \\
&\iff (\chi_P(x) = 1 \wedge \chi_Q(x) = 1 \wedge \chi_{P\cap Q}(x) = 1) \vee \\
&\qquad (\chi_P(x) + \chi_Q(x) = 1 \wedge \chi_{P\cap Q}(x) = 0) \\
&\iff \chi_P(x) + \chi_Q(x) - \chi_{P\cap Q}(x) = 1.
\end{aligned}$$

In Analogie zur vorangehenden Teilaufgabe reicht es zu zeigen, dass die Abbildung $f = \chi_P + \chi_Q - \chi_{P\cap Q}$ nur Werte in der Menge $\{0, 1\}$ annimmt. Da jede einzelne Abbildung nur Werte in $\{0, 1\}$ annimmt, wissen wir, dass für alle $x \in X$ gilt $f(x) \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Angenommen $f(x) = -1$, dann ist $\chi_P(x) = \chi_Q = 0$ und $\chi_{P\cap Q} = 1$. Aus den ersten Gleichungen folgt $x \notin P \wedge x \notin Q$ und aus der zweiten Gleichung $x \in P \cap Q$. Es folgt aus der ersten Aussage $\neg(x \in P \vee x \in Q)$, bzw. $x \notin P \cup Q$, im Widerspruch zu $x \in P \cap Q$. Insbesondere ist also $f(x) \neq -1$ für ale $x \in X$.

Angenommen $f(x) = 2$, dann ist $\chi_P(x) = \chi_Q(x) = 1$ und $\chi_{P\cap Q} = 0$. Aus den ersten Gleichungen folgt $x \in P \wedge x \in Q$ und somit $x \in P \cap Q$. Die letzte Gleichung impliziert $x \notin P \cap Q$. Das ist absurd. Insbesondere ist also $f(x) \neq 2$ für ale $x \in X$ und f nimt nur Werte in $\{0, 1\}$ an.

Da $\chi_{P\cup Q}$, $\max\{\chi_P, \chi_Q\}$ und $\chi_P + \chi_Q - \chi_{P\cap Q}$ nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, und da wir oben gezeigt haben, dass gilt

$$\chi_{P\cup Q}(x) = 1 \iff \max\{\chi_P(x), \chi_Q(x)\} = 1 \iff \chi_P(x) + \chi_Q(x) - \chi_{P\cap Q}(x) = 1$$

folgt

$$\begin{aligned}
&\chi_{P\cup Q}(x) \neq 1 \iff \max\{\chi_P(x), \chi_Q(x)\} \neq 1 \iff \chi_P(x) + \chi_Q(x) - \chi_{P\cap Q}(x) \neq 1 \\
\implies &\chi_{P\cup Q}(x) = 0 \iff \max\{\chi_P(x), \chi_Q(x)\} = 0 \iff \chi_P(x) + \chi_Q(x) - \chi_{P\cap Q}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Folglich stimmen die Funktionen überein.

c) Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung $f = \chi_P - \chi_{P\cap Q}$ nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen kann. Da die Abbildungen χ_P und $\chi_{P\cap Q}$ Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, wissen wir, dass f Werte in $\{-1, 0, 1\}$ annnimmt. Sei $x \in X$ mit $f(x) = -1$, dann gilt $\chi_P(x) = 0$ und $\chi_{P\cap Q}(x) = 1$, und folglich ist gemäss der ersten Gleichung $x \notin P$ und gemäss der zweiten Gleichung $x \in P \cap Q \subset P$. Das ist absurd und folglich ist $f(x) \neq -1$ für alle $x \in X$.

Bitte wenden!

Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{P\setminus Q}(x) = 1 &\iff x \in P \setminus Q \\
&\iff x \in P \wedge x \notin Q \\
&\iff x \in P \wedge x \notin P \cap Q \\
&\iff \chi_P(x) = 1 \wedge \chi_{P\cap Q}(x) = 0 \\
&\iff \chi_P(x) - \chi_{P\cap Q}(x) = 1.
\end{aligned}$$

Da $\chi_{P\setminus Q}$ und $\chi_P - \chi_{P\cap Q}$ nur Werte in $\{0,1\}$ annehmen, stimmen die Abbildungen punktweise überein.

d) Es ist $P^c = X \setminus P$, und somit folgt aus der vorangehenden Teilaufgabe, dass für alle $x \in X$ gilt

$$\chi_{P^c}(x) = \chi_{X\setminus P}(x) = \chi_X(x) - \chi_{P\cap X}(x) = 1 - \chi_P(x).$$

Da x beliebig war, folgt die Behauptung.

e) Da χ_P und χ_Q nur Werte in $\{0,1\}$ annehmen, nimmt die Abbildung $\chi_P - \chi_Q$ Werte in $\{-1,0,1\}$ an, und somit ist der Wertebereich von $(\chi_P - \chi_Q)^2$ enthalten in $\{0,1\}$.

Sei $x \in X$, dann ist

$$\begin{aligned}
\chi_{P\Delta Q}(x) = 1 &\iff x \in P\Delta Q \iff x \in P \cup Q \wedge x \notin P \cap Q \\
&\iff \chi_{P\cup Q}(x) = 1 \wedge \chi_{P\cup Q}(x) = 0 \\
&\iff \chi_P(x) + \chi_Q(x) - \chi_P(x)\chi_Q(x) = 1 \wedge \chi_P(x)\chi_Q(x) = 0 \\
&\iff (\chi_P(x) = 1 \wedge \chi_Q(x) = 0) \vee (\chi_P(x) = 0 \wedge \chi_Q(x) = 1) \\
&\iff (\chi_P(x) - \chi_Q(x))^2 = 1.
\end{aligned}$$

Da die Abbildungen $\chi_{P\Delta Q}$ und $(\chi_P - \chi_Q)^2$ nur Werte in $\{0,1\}$ annehmen, folgt die Behauptung.

3. **a)** Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$. Wir müssen zeigen, dass $x_1 = x_2$ folgt.

Es ist $g(f(x_1)) = (g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) = g(f(x_2))$ und somit folgt aus der Injektivität von g, dass $f(x_1) = f(x_2)$ ist. Da f injektiv ist, folgt also $x_1 = x_2$. Somit ist $g \circ f$ injektiv.

b) Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$, sodass $g(y) = z$ ist. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$ gilt. Es folgt

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

und da $z \in Z$ beliebig war, ist $g \circ f$ also surjektiv.

Siehe nächstes Blatt!

c) Da f und g bijektiv sind, sind f und g insbesondere injektiv und surjektiv. Somit ist $g \circ f$ injektiv und surjektiv und somit bijektiv.

d) Wir schreiben $Y = f(X) \sqcup f(X)^c$. Sei $y \in f(X)$, dann existiert aufgrund der Injektivität von f ein eindeutig bestimmtes $x_y \in X$, sodass $f(x_y) = y$. Definiere $g(y) = x_y$ für $y \in f(X)$. Falls $f(X)^c = \{\}$ gilt, ist g als Abbildung von Y nach X wohldefiniert. Andernfalls wählen wir ein beliebiges $x_* \in X$ und definieren $g(y) = x_*$ für alle $y \in f(X)^c$. Da $f(X)$ und $f(X)^c$ disjunkt sind, erhalten wir eine wohldefinierte Abbldung $g : Y \to X$.

Sei nun $x \in X$, dann ist per definitionem $x = x_{f(x)}$, und folglich

$$g(f(x)) = x_{f(x)} = x = \mathrm{id}_X(x).$$

Da x beliebig war, folgt die Behauptung.

e) Die Mengen $f^{-1}\{y\}, y \in Y$, bilden eine Partition von X, denn da f wohldefiniert ist, existiert für jedes $x \in X$ ein $y \in Y$, sodass $f(x) = y$ ist, und für beliebige $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$ ist

$$f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\} = f^{-1}(\{y_1\} \cap \{y_2\}) = f^{-1}\{\} = \{\}.$$

Für jedes $y \in Y$ wähle man nun ein $x_y \in f^{-1}\{y\}$ und definiert $g : Y \to X$ durch $g(y) = x_y$, insbesondere ist also $g(y) \in f^{-1}\{y\}$ für alle $y \in Y$. Sei $y \in Y$, dann ist $g(y) \in f^{-1}\{y\}$ und folglich $f(g(y)) = y = \mathrm{id}_Y(y)$. Da y beliebig war, folgt die Aussage.

Achtung: Die Lösung verwendet das *Auswahlaxiom*. Dieses wird sowohl in der Analysis- als auch in dieser Vorlesung vorausgesetzt. Es ist nämlich nicht ohne weiteres klar, dass wir für jedes $y \in Y$ ein x in $f^{-1}\{y\}$ wählen können. Tatsächlich ist die Aussage, dass jede surjektive Abbildung eine Rechtsinverse besitzt zum Auswahlaxiom äquivalent. Siehe hierfür [1, p. 185].

4. **a)** Seien $m_1, n_1 \in \mathbb{N}_0$ mit $\imath_+(m_1) = \imath_+(n_1)$, dann gilt $(m_1, 0) \sim (n_1, 0)$ und folglich $m_1 + 0 = n_1 + 0$, also $m_1 = n_1$. Folglich ist $\imath_+$ injektiv.

Seien $m_2, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $\imath_-(m_2) = \imath_-(n_2)$, dann gilt $(0, m_2) \sim (0, n_2)$ und folglich $0 + n_2 = 0 + m_2$, also $m_2 = n_2$. Folglich ist $\imath_-$ injektiv.

b) Angenommen, der Schnitt ist nicht leer. Sei $[(m, n)] \in \imath_+(\mathbb{N}_0) \cap \imath_-(\mathbb{N})$, dann existieren $m_1 \in \mathbb{N}_0$ und $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $\imath_+(m_1) = [(m, n)]$ und $\imath_-(n_2) = [(m, n)]$. Insbesondere ist also $[(m_1, 0)] = [(0, n_2)]$ und somit $(m_1, 0) \sim (0, n_2)$. Es gilt also $m_1 + n_2 = 0 + 0 = 0$. Dies ist absurd, da $m_1 \geq 0$ und $n_2 > 0$ und somit $m_1 + n_2 > 0$ gilt. Es folgt also, dass $\imath_+(\mathbb{N}_0) \cap \imath_-(\mathbb{N})$

Bitte wenden!

c) Sei $(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$, und sei $m \geq n$, dann ist $m - n \in \mathbb{N}_0$ und es gilt $(m-n, 0) \sim (m,n)$, denn $(m-n)+n = m = m+0$. Folglich ist $[(m,n)] = \imath_+(m-n) \in \imath_+(\mathbb{N}_0)$.

Angenommen $m < n$, dann ist $n - m \in \mathbb{N}$ und es gilt $(m,n) \sim (0, n-m)$, denn $m + (n-m) = n = 0 + n$. Folglich ist $[(m,n)] \in \imath_-(\mathbb{N})$.

Da $(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass für alle $(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ ein $m_1 \in \mathbb{N}_0$ oder ein $n_2 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(m,n) \in \imath_+(m_1)$ oder $(m,n) \in \imath_-(n_2)$ gilt, insbesondere also $[(m,n)] = \imath_+(m_1)$ oder $[(m,n)] = \imath_-(n_2)$. Da jedes Element in $\mathbb{N}_0^2/\sim$ von der Form $[(m,n)]$ ist für ein $(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$, folgt also

$$\mathbb{N}_0^2/\sim \subset \imath_+(\mathbb{N}_0) \cup \imath_-(\mathbb{N})$$

und somit die Gleichheit.

Literatur

[1] H. Schichl und R. Steinbauer, Einführung in das mathematische Arbeiten, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.