

Lösung 7:

Lineare Abbildungen: Kern, Bild, Rang und Darstellung durch Matrizen

1. a) Seien $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind

$$\begin{aligned}\text{id}_V(v_1 + v_2) &= v_1 + v_2 = \text{id}_V(v_1) + \text{id}_V(v_2) \\ \text{id}_V(\lambda v_1) &= \lambda v_1 = \lambda \text{id}_V(v_1)\end{aligned}$$

Also ist id_V linear.

- b) Seien $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind

$$\begin{aligned}\mathbf{0}(v_1 + v_2) &= 0_W = 0_W + 0_W = \mathbf{0}(v_1) + \mathbf{0}(v_2) \\ \mathbf{0}(\lambda v_1) &= 0_W = \lambda 0_W = \lambda \mathbf{0}(v_1)\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{0}$ linear.

- c) Gegeben $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy) \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

zeigen wir die Linearität von f . Man bemerke, dass es sich bei r_φ um den Spezialfall $a = d = \cos \varphi$ und $-b = c = \sin \varphi$ handelt und dass aus der Linearität von f die Linearität von r_φ folgt. Seien $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2), c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2)) \\ &= ((ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2), (cx_1 + dy_1) + (cx_2 + dy_2)) \\ &= (ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1) + (ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ f(\lambda v_1) &= f(\lambda x_1, \lambda y_1) = (a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1), c(\lambda x_1) + d(\lambda y_1)) \\ &= (\lambda(ax_1 + by_1), \lambda(cx_1 + dy_1)) \\ &= \lambda(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1) = \lambda f(v_1)\end{aligned}$$

Die Abbildung rotiert einen Vektor in \mathbb{R}^2 um den Winkel φ um den Ursprung.

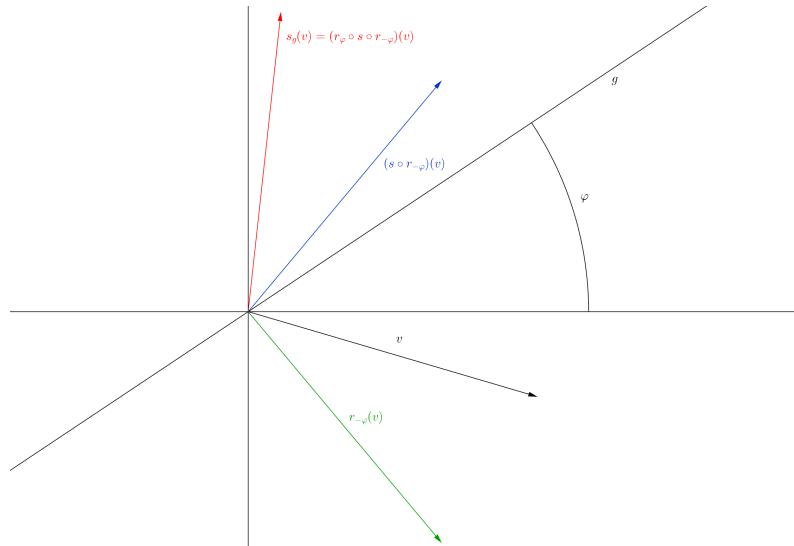


Abbildung 1 – Die Spiegelung des Vektors v an der Geraden g durch den Ursprung.

- d)** Sei g eine Gerade in \mathbb{R}^2 , sei φ der Winkel zwischen der Geraden und dem positiven Teil der x -Achse. Dann ist die Reflexion s_g an der Geraden g gleich der Komposition von Rotation um Winkel φ im Uhrzeigersinn, Reflexion s an der x -Achse und Rotation um Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn, d.h. $s_g = r_\varphi \circ s \circ r_{-\varphi}$, wobei $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $s(x, y) = (x, -y)$ (siehe Bild ??). Wir wissen, dass die Komposition linearer Abbildungen linear ist, und wegen Teilaufgabe (c) reicht es zu zeigen, dass s linear ist. Seien $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind

$$\begin{aligned} s(v_1 + v_2) &= s(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2, (-y_1) + (-y_2)) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = s(v_1) + s(v_2) \\ s(\lambda v_1) &= s(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1, -(\lambda y_1)) = (\lambda x_1, \lambda(-y_1)) = \lambda(x_1, -y_1) = \lambda s(v_1) \end{aligned}$$

und folglich ist s linear, und somit auch $s_g = r_\varphi \circ s \circ r_{-\varphi}$.

- e)** Seien $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\begin{aligned} P(v_1 + v_2) &= P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \\ &= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = P(v_1) + P(v_2) \\ P(\lambda v_1) &= P(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \\ &= (\lambda x_1, \lambda y_1, 0) \\ &= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda 0) \\ &= \lambda(x_1, y_1, 0) = \lambda P(v_1) \end{aligned}$$

Also ist P linear.

Siehe nächstes Blatt!

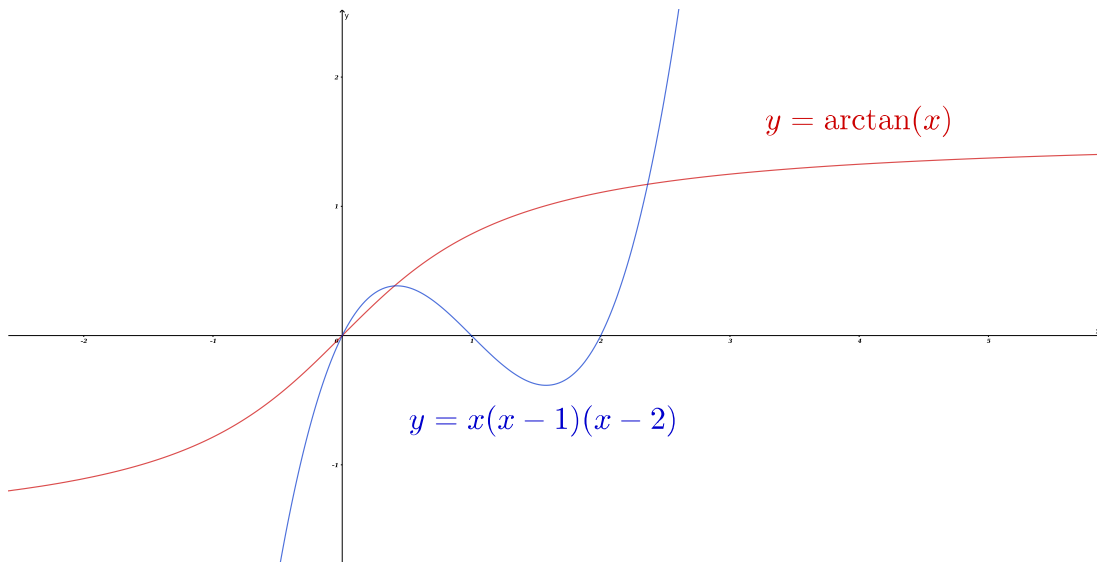


Abbildung 2 – Die Graphen der Funktionen $x \mapsto \arctan(x)$ und $x \mapsto x(x - 1)(x - 2)$.

2. a) \Rightarrow : Angenommen T ist injektiv, dann ist $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$ und folglich $\text{nullity}(T) = \dim \text{Ker}(T) = 0$, also folgt aus der Dimensionsformel und der Annahme

$$\dim W = \dim V = \text{nullity}(T) + \text{Rang}(T) = \text{Rang}(T)$$

und also $\dim \text{Im}(T) = \text{Rang}(T) = \dim W$. Folglich ist $\text{Im}(T)$ ein Unterraum von W von voller Dimension und also $\text{Im}(T) = W$.

- \Rightarrow : Angenommen T ist surjektiv, dann ist $\text{Im}(T) = W$ und folglich $\text{Rang}(T) = \dim \text{Im}(T) = \dim W$, also folgt aus der Dimensionsformel

$$\dim V = \text{nullity}(T) + \text{Rang}(T) = \text{nullity}(T) + \dim W$$

und wegen $\dim V = \dim W$ folgt $0 = \text{nullity}(T)$, d.h. T ist injektiv.

Wir geben nun die gewünschten Gegenbeispiele. Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \arctan(x)$ und $g(x) = x(x - 1)(x - 2)$. Dann ist f zwar injektiv, aber nicht surjektiv, während g zwar surjektiv, aber nicht injektiv ist. Die Graphen dieser beiden Funktionen sind in Abbildung ?? dargestellt.

Beachten Sie, dass die Graphik eigentlich kein Gegenbeispiel ist, da wir nicht sehen, dass \arctan tatsächlich injektiv und tatsächlich nicht surjektiv ist (weil das Papier zu schmal ist), und ebenso nicht sehen, dass g tatsächlich surjektiv ist (aus demselben Grund). In einer Prüfung wäre dieses Argument unzulässig. Sie werden aber im Verlaufe des Semesters in der Analysis Argumente kennenlernen, mit welchen Sie die zu diesen beiden Funktionen gemachten Aussagen beweisen könnten.

Bitte wenden!

b) \Rightarrow : Angenommen S ist linear unabhängig. Seien $v_1, \dots, v_k \in S$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ so dass

$$0_W = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_k T(v_k)$$

und $T(v_1), \dots, T(v_k)$ paarweise verschieden (wegen der Injektivität von T dazu äquivalent: $v_1, \dots, v_k \in S$ paarweise verschieden). Dann folgt aus der Linearität von T , dass

$$0_W = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_k T(v_k) = T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k)$$

Da T injektiv ist, folgt $0_V = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ und wegen der linearen Unabhängigkeit von S also $0 = \lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq k$. Das zeigt, dass $T(S) = \{w \in W \mid \exists v \in S : w = T(v)\}$ linear unabhängig ist.

\Leftarrow : Angenommen $T(S)$ ist linear unabhängig. Seien $v_1, \dots, v_k \in S$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit

$$0_V = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

Da T linear und injektiv ist, sind $T(v_1), \dots, T(v_k) \in T(S)$ paarweise verschieden und

$$0_W = T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_k T(v_k)$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $T(S)$ folgt $\lambda_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$ und folglich ist S linear unabhängig.

3. a) Wir müssen zeigen, dass $\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0_V\}$ und $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) = V$.

- Sei $v \in \text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P)$. Dann ist $v = P(v')$ für ein $v' \in V$. Da $v \in \text{Ker}(P)$ und wegen Idempotenz von P folgt

$$0_V = P(v) = P(P(v')) = P^2(v') = P(v') = v$$

und folglich ist $\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0_V\}$.

- Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(P) + \text{Im}(P)) &= \dim \text{Ker}(P) + \dim \text{Im}(P) - \underbrace{\dim(\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P))}_{=\{0_V\}} \\ &= \text{nullity}(P) + \text{Rang}(P) = \dim V \end{aligned}$$

wegen der Dimensionsformel. Also ist $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) \subset V$ ein Unterraum voller Dimension, also $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) = V$ und da, wie bereits gezeigt, $\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0_V\}$ folgt $\text{Ker}(P) \oplus \text{Im}(P) = V$ wie gewünscht.

Siehe nächstes Blatt!

- b) Angenommen $V = W_1 \oplus W_2$ und $v \in V$ beliebig, dann existieren eindeutig definierte $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, so dass $v = w_1 + w_2$. Sei nämlich $w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2$ mit $w'_1 \in W_1$ und $w'_2 \in W_2$, dann ist $w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2 \in W_1 \cap W_2$ und wegen $\{0_V\} = W_1 \cap W_2$ folgt $w_1 = w'_1$ und $w_2 = w'_2$.

Wir definieren $P : V \rightarrow V$ durch $P(v) := w_2$, wobei $v = w_1 + w_2$ eine eindeutige Zerlegung von V mit $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ ist. Wegen vorangehender Argumentation ist $P(v)$ wohldefiniert. Im Folgenden überprüfen wir die gewünschten Eigenschaften von P . Hierfür verwenden wir die folgende

Tatsache: Sei $v \in V$ beliebig. Sei $w \in W_2$. Dann ist $v - w \in W_1$ genau dann, wenn $P(v) = w$.

Beweis:

“ \Rightarrow ”: Sei $v \in V$ beliebig und $w \in W_2$ wie oben, d.h. $v - w \in W_1$. Dann ist $v = (v - w) + w$ eine Zerlegung von v mit $(v - w) \in W_1$ und $w \in W_2$. Wegen Eindeutigkeit der Zerlegung ist per definitionem $w = P(v)$.

“ \Leftarrow ”: Sei $v \in V$ beliebig, $w \in W_2$ mit $P(v) = w$. Per definitionem ist $P(v)$ die eindeutige W_2 -Komponente von v , d.h. es existiert ein $w_1 \in W_1$ so dass $v = w_1 + P(v) = w_1 + w$ und folglich $v - w = w_1 \in W_1$.

Linearität von P: Seien $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir müssen beweisen, dass $P(v_1 + \lambda v_2) = P(v_1) + \lambda P(v_2)$. Da $P(v_1) + \lambda P(v_2) \in W_2$, reicht es wegen eingangs bewiesener Tatsache zu zeigen, dass

$$(v_1 + \lambda v_2) - (P(v_1) + \lambda P(v_2)) \in W_1$$

Da W_1 ein Unterraum ist, gilt

$$(v_1 + \lambda v_2) - (P(v_1) + \lambda P(v_2)) = \underbrace{(v_1 - P(v_1))}_{\in W_1} + \lambda \underbrace{(v_2 - P(v_2))}_{\in W_1} \in W_1$$

Wegen der eingangs bewiesenen Tatsache folgt

$$P(v_1 + \lambda v_2) = P(v_1) + \lambda P(v_2)$$

Da $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig waren, folgt also, dass P linear ist.

Idempotenz von P: Wir zeigen, dass P idempotent ist, d.h. für beliebige $v \in V$ gilt $P(P(v)) = P(v)$. Per definitionem ist $P(v) \in W_2$. Andererseits ist sicherlich $P(v) - P(v) = 0_V \in W_1$ und also folgt wegen der eingangs bewiesenen Tatsache $P(P(v)) = P(v)$.

Im(P) = W₂: Per definitionem ist $\text{Im}(P) \subset W_2$. Wir müssen also nur zeigen, dass $W_2 \subset \text{Im}(P)$. Sei $w \in W_2$ beliebig, dann ist $w - w = 0_V \in W_1$ und wegen $w \in W_2$ und der eingangs bewiesenen Tatsache folgt $w = P(w)$. Dies zeigt, dass für jedes $w \in W_2$ ein $v \in V$ (z. Bsp. wählen wir $v := w$) existiert, mit $P(v) = w$ und folglich ist $W_2 \subset \text{Im}(P)$, also $\text{Im}(P) = W_2$.

Bitte wenden!

Ker(P) = W₁: Sei $v \notin W_1$, dann ist $P(v) \neq 0_V$, da $v = v - 0_V \notin W_1$. Also gilt $W_1^c \subset (\text{Ker}(P))^c$ und also $\text{Ker}(P) \subset W_1$.

Wir zeigen $W_1 \subset \text{Ker}(P)$. Sei $w \in W_1$. Die Behauptung ist, dass $P(w) = 0_V$. Tatsächlich ist $w - 0_V \in W_1$ und $0_V \in W_2$, somit folgt $P(w) = 0_V$ aus der eingangs bewiesenen Tatsache. Also ist $W_1 \subset \text{Ker}(P)$ und folglich $W_1 = \text{Ker}(P)$.

Alternativ argumentiert man wie folgt. Seien $v = w_1 + w_2, \tilde{v} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$ beliebige Vektoren in V mit eindeutigen Zerlegungen so dass $w_1, \tilde{w}_1 \in W_1$ und $w_2, \tilde{w}_2 \in W_2$. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$v + \lambda\tilde{v} = (w_1 + w_2) + \lambda(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) = \underbrace{(w_1 + \lambda\tilde{w}_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + \lambda\tilde{w}_2)}_{\in W_2}$$

eine Zerlegung in Komponenten in W_1 und W_2 . Wegen Eindeutigkeit der Zerlegung, ist also

$$P(v) + \lambda P(\tilde{v}) = w_2 + \lambda\tilde{w}_2 = P(v + \lambda\tilde{v})$$

Dies zeigt, dass P linear ist.

$\text{Ker}(P)$ ist genau die Menge der Vektoren, deren W_2 -Komponente 0_V ist, d.h. $\text{Ker}(P) = W_1 + \{0_V\} = W_1$.

Das Bild von P ist per definitionem in W_2 enthalten. Wir müssen also zeigen, dass jedes beliebige $w \in W_2$ im Bild von P enthalten ist. Sei also $w \in W_2$. Dann ist aber $P(w) = w$ wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung $w = 0_V + w$.

4. a) Da $T(0_V) = 0_{W'} \in W'$, gilt $0_V \in T^{-1}(W')$. Seien $v_1, v_2 \in T^{-1}(W')$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \in W'$$

und folglich $v_1 + \lambda v_2 \in T^{-1}(W')$. Dies zeigt, dass $T^{-1}(W')$ ein Unterraum ist.

- b) Im Folgenden bezeichne $T|_{T^{-1}(W')}$ die Restriktion von T auf den Unterraum $T^{-1}(W')$. Die Restriktion ist sicherlich linear, da sie die Restriktion einer linearen Abbildung ist. Wir wissen, dass

$$\dim T^{-1}(W') = \text{nullity}(T|_{T^{-1}(W')}) + \text{Rang}(T|_{T^{-1}(W')})$$

Da $0_{W'} \in W'$, gilt $\text{Ker}(T) \subset T^{-1}(W')$ und für $v \in T^{-1}(W')$ mit $T(v) = 0_{W'}$ gilt $v \in \text{Ker}(T)$. Also ist $\text{Ker}(T|_{T^{-1}(W')}) = \text{Ker}(T)$ und insbesondere

$$\text{nullity}(T|_{T^{-1}(W')}) = \text{nullity}(T)$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\text{Im}(T|_{T^{-1}(W')}) = \text{Im}(T) \cap W'$. Sei $w \in \text{Im}(T) \cap W'$, dann existiert ein $v \in V$ mit $T(v) = w$, da $w \in \text{Im}(T)$. Weil $w \in W'$, folgt

Siehe nächstes Blatt!

$T(v) \in W'$ und folglich $v \in T^{-1}(W')$ und also ist $w = T(v) \in \text{Im}(T|_{T^{-1}(W')})$ und also $\text{Im}(T) \cap W' \subset \text{Im}(T|_{T^{-1}(W')})$. Sei nun $w \in \text{Im}(T|_{T^{-1}(W')})$, dann existiert $v \in T^{-1}(W')$ mit $w = T(v)$. Da $v \in T^{-1}(W')$, folgt $w \in W'$ und wegen $w = T(v)$ auch $w \in \text{Im}(T)$. Also ist $\text{Im}(T|_{T^{-1}(W')}) \subset \text{Im}(T) \cap W'$.

Es folgt also

$$\begin{aligned} \dim T^{-1}(W') &= \text{nullity}(T|_{T^{-1}(W')}) + \text{Rang}(T|_{T^{-1}(W')}) \\ &= \dim \text{Ker}(T|_{T^{-1}(W')}) + \dim \text{Im}(T|_{T^{-1}(W')}) \\ &= \dim \text{Ker}(T) + \dim(\text{Im}(T) \cap W') \end{aligned}$$

und da $\text{nullity}(T) := \dim \text{Ker}(T)$ folgt die Behauptung.

5. Sei $p : V \rightarrow V/W$ die kanonische Projektion $v \mapsto v + W$. Wir wissen, dass p surjektiv ist, da jedes Element in V/W per definitionem von der Form $v + W$ ist. Wir haben zudem gezeigt, dass $\text{Ker}(p) = W$ gilt. Also gilt nach der Dimensionsformel aus der Vorlesung

$$\dim(V) = \text{nullity}(p) + \text{Rang}(p) = \dim(W) + \dim(V/W).$$

Umformung liefert die gewünschte Formel.

6. a) Sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, dann definieren wir

$$l_r(x, y) = py - qx \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Man bemerke, dass die Abbildung von der Wahl des Repräsentanten von $r = \frac{p}{q}$ abhängt.

Seien $(x, y) \in \mathbb{K} \setminus (l_r)$, dann gilt $0 = py - qx$. Da $pq \neq 0$ ist, gelten

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies py = 0 \implies y = 0, \\ y = 0 &\implies -qx = 0 \implies x = 0. \end{aligned}$$

Also ist entweder $x = y = 0$ oder es gilt $xy \neq 0$. Insbesondere folgt aus der definierenden Gleichung, dass $\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$.

Angenommen $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $y \neq 0$ und $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, dann ist $xq = py$ bzw. $0 = py - xq$ und somit $(x, y) \in \text{Ker}(l_r)$ wie gewünscht.

- b) Sei $a \in \mathbb{Z}$ ein gemeinsamer Teiler von p und q , d.h. es existieren $p', q' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass $ap' = p$ und $aq' = q$, dann gilt nach vorangehender Diskussion

$$\frac{p}{q} = \frac{ap'}{aq'} = \frac{a p'}{a q'} = \frac{p'}{q'}.$$

Bitte wenden!

Unter Verwendung von Aufgabe 1.c) von Serie 3 wissen wir somit, dass für jedes $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ein Repräsentant $(p', q') \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$ existiert, sodass $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ gilt und p', q' teilerfremd sind. Wir nehmen im Folgenden also o.B.d.A. an, dass p, q teilerfremd sind. Man beachte, dass $-p, -q$ ebenfalls teilerfremd sind mit $\frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $q \in \mathbb{N}$ gilt. Aus dem Lemma von Bézout folgt nun, dass $1 \in \text{Im}(l_{p/q})$, und somit ist $\dim(\text{Im}(l_{p/q})) \geq 1$. Aus $\text{Im}(l_{p/q}) \subseteq \mathbb{R}$ und $\text{Rang}(l_{p/q}) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$ folgt also $\text{Rang}(l_{p/q}) = 1$. Da $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ist, gilt also

$$\dim(\text{Ker}(l_{p/q})) = \text{nullity}(l_{p/q}) = \dim(\mathbb{R}^2) - \text{Rang}(l_{p/q}) = 1.$$

Man beachte, dass $(p, q) \in \text{Ker}(l_{p/q})$ gilt.

Sei nun $(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit teilerfremden Einträgen, sodass $\frac{p}{q} = \frac{s}{t}$ ist. Dann ist $(s, t) \in \text{Ker}(l_{p/q}) \setminus \{0\}$, und folglich existiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $(s, t) = \lambda(p, q)$ gilt. Nach Voraussetzung ist $q \neq 0$ und somit $\lambda = \frac{t}{q} \in \mathbb{Q}$. Insbesondere existieren also $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$, sodass $(s, t) = \frac{\alpha}{\beta}(p, q)$. Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A. an, dass α und β teilerfremd sind. Nach Multiplikation mit β auf beiden Seiten, folgt

$$(\beta s, \beta t) = \beta(s, t) = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}(p, q)\right) = (\beta \frac{\alpha}{\beta})(p, q) = \alpha(p, q) = (\alpha p, \alpha q).$$

Unter Verwendung der Teilerfremdheit von α und β folgt zusammen mit Aufgabe 1.b) von Serie 3 $\beta \mid p$ sowie $\beta \mid q$. Insbesondere ist $\beta \in \{\pm 1\}$ und somit nach Voraussetzung $\beta = 1$. Andererseits gilt dann $\alpha \mid s$ sowie $\alpha \mid t$. Also ist auch $\alpha \in \{\pm 1\}$. Da $q, t \in \mathbb{N}$ sind, folgt $\alpha = 1$. Insbesondere ist also $(s, t) = (p, q)$.