

## Serie 9: Basiswechsel & Dualraum

1. Betrachten Sie die Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$$

a) Zeigen Sie, dass  $E$  ein Unterraum ist.

b) Zeigen Sie, dass das *orthogonale Komplement*

$$E^\perp := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (x', y', z') \in E : xx' + yy' + zz' = 0\}$$

ein nicht-trivialer Unterraum von  $\mathbb{R}^3$  ist und zeigen Sie  $E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^3$ .

c) Sei  $P_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die *orthogonale Projektion* auf  $E$ , d.h.  $P$  ist eine Projektion mit  $\text{Ker}(P_E) = E^\perp$  und  $\text{Im}(P_E) = E$ . Finden Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{R}^3$ , so dass

$$[P_E]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Bestimmen Sie  $[P_E]_{\mathcal{E}_3}$ .

2. Im Folgenden betrachten wir den Vektorraum der Polynome  $P(\mathbb{R})$  sowie die Unterräume  $\mathbb{R}_d[X]$  der Polynome von Grad höchstens  $d$ . Setzen Sie für die ganze Aufgabe voraus, dass die Monome  $\{x^n \mid n \geq 0\}$  linear unabhängig sind.<sup>1</sup> Im Folgenden seien

$$p_k(x) := x^k \quad \text{und} \quad q_k(x) := (x+1)^k \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

---

<sup>1</sup>Sie können dies unter Verwendung von Proposition 3.17 (Wachstum von Polynomfunktionen und Eindeutigkeit der Koeffizienten) im Analysiskript beweisen.

- a) Sei  $\mathcal{B}_d = (p_0, \dots, p_d)$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}_d$  eine Basis von  $\mathbb{R}_d[X]$  ist.
- b) Sei  $\mathcal{C}_d = (q_0, \dots, q_d)$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{C}_d$  eine Basis von  $\mathbb{R}_d[X]$  ist.
- c) Berechnen Sie die Basiswechsellmatrizen  $[\text{id}_{\mathbb{R}_d[X]}]_{\mathcal{B}_d}^{\mathcal{C}_d}$  und  $[\text{id}_{\mathbb{R}_d[X]}]_{\mathcal{C}_d}^{\mathcal{B}_d}$  für  $d = 2, 3$ .
- d) Betrachten Sie die Ableitung  $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ . Zeigen Sie, dass  $D$  linear ist und dass die Restriktion  $D|_{\mathbb{R}_d[X]}$  eine lineare Abbildung  $D_d : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}_{d-1}[X]$  definiert.
- e) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen  $[D_d]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}$  sowie  $[D_d]_{\mathcal{C}_4}^{\mathcal{C}_3}$ .
- f) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix  $[D_d]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{C}_3}$  unter Verwendung von Basiswechsellmatrizen.
- g) Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$$

Sei  $T : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  die lineare Abbildung, so dass  $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} = A$ . Bestimmen Sie  $T(p)$  für

$$p(x) = 1 - 10x + x^3$$

3. Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und seien  $f_1, f_2, f_3 \in V^*$  gegeben durch

$$f_1(x, y, z) = x - 2y, \quad f_2(x, y, z) = x + y + z, \quad f_3(x, y, z) = y - 3z$$

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$  eine geordnete Basis von  $V^*$  ist und finden Sie eine geordnete Basis  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  von  $V$ , so dass  $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$ .

4. Sei  $T : V \rightarrow W$  ein beliebiger Homomorphismus zwischen zwei endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- (a)  $T$  ist injektiv.
- ♡(b) Die duale Abbildung  $T^* : W^* \rightarrow V^*$  ist surjektiv.
- (c) Das Nullelement von  $V$  ist das einzige Element, das auf das Nullelement von  $W$  abgebildet wird.
- (d) Für jedes  $v \in V \setminus \{0\}$  existiert ein  $g \in W^*$  mit  $g(T(v)) \neq 0$ .

5. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , sei  $W$  ein Unterraum.

**Siehe nächstes Blatt!**

- a) Zeigen Sie, dass jede Linearform auf  $W$  eine Erweiterung auf  $V$  besitzt.
- b) Sei  $W^\perp := \{f \in V^* \mid W \subseteq \text{Ker}(f)\}$ . Zeigen Sie, dass  $W^\perp \subseteq V^*$  ein Unterraum ist und zeigen Sie

$$(V/W)^* \cong W^\perp$$

- c) Finden Sie einen kanonischen Isomorphismus

$$(V^*/W^\perp)^* \cong W$$

## 6. Online Abgabe Serie 9:

1. Jede Basiswechselformatrix ist invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

2. Sei  $\mathcal{E}_2 := (e_1, e_2)$  die kanonische Basis von  $\mathbb{R}^2$  und sei  $\mathcal{C} := \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$  eine weitere geordnete Basis. Bestimmen Sie die  $Q := [\text{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{C}}$ .

(a)  $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

(b)  $Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

(c)  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

(d)  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

(e)  $Q = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

3. Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von  $\mathbb{R}_2[X]$ :

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2), \quad \mathcal{C} = (x^2, (x+1)^2, (x+2)^2)$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix  $Q := [\text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ .

(a)  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c)  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d)  $Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e)  $Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f)  $Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4. *Prüfung Sommer 2017:* Sei  $T : V \rightarrow V^*$  ein Isomorphismus und  $\mathcal{B}$  eine endliche geordnete Basis für  $V$  so gilt  $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$

(a) richtig

(b) falsch

**Bitte wenden!**

5. Seien  $V, W$  endlichdimensional und  $V$  isomorph zu  $W$ , so ist  $V^*$  isomorph zu  $W^*$

- (a) richtig
- (b) falsch

6. Seien  $V, W$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$ . Seien  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\mathcal{C}$  geordnete Basen von  $V$  bzw.  $W$ . Sei  $\mathcal{C}^* = (f_1, \dots, f_m)$  die zu  $\mathcal{C}$  duale Basis von  $W^*$ . Dann ist für beliebige  $T \in \text{Hom}(V, W)$

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ij} = f_i(T(v_j)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

- (a) richtig
- (b) falsch

7. Prüfung Sommer 2017: Sei  $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$  und

$$\text{tr} : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; A \mapsto \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

die Spur. Dann ist  $\text{tr} \in V^*$ .

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Vor Donnerstag, den 23. November 11:00 Uhr vormittags im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit *Abgabe*.