Lösung Serie 10: Elementare Zeilenumformungen & Elementarmatrizen, Rang & Inverse einer Matrix

1. **a)** Sei $w \in \operatorname{Im}(T_1 + T_2)$, dann existiert ein $v \in V$, so dass

$$w = (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \in \operatorname{Im}(T_1) + \operatorname{Im}(T_2)$$

Also ist $\operatorname{Im}(T_1 + T_2) \subseteq \operatorname{Im}(T_1) + \operatorname{Im}(T_2)$ und folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{Rang}(T_1 + T_2) &= \dim \operatorname{Im}(T_1 + T_2) \\ &\leq \dim \operatorname{Im}(T_1) + \dim \operatorname{Im}(T_2) \\ &= \operatorname{Rang}(T_1) + \operatorname{Rang}(T_2)\end{aligned}$$

b) Wir bemerken zuerst, dass $\operatorname{Im}(S \circ T) = \operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)})$, wobei $S|_{\operatorname{Im}(T)} \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Im}(T), W)$ die Abbildung

$$\forall v \in \operatorname{Im}(T) : \ S|_{\operatorname{Im}(T)}(v) := S(v)$$

sei; d.h. $S|_{\operatorname{Im}(T)}$ ist die Restriktion von S auf den Unterraum $\operatorname{Im}(T) \subseteq V$.

"$\subseteq$": Sei $w \in \operatorname{Im}(S \circ T)$, dann ist $w = (S \circ T)(u) = S(T(u))$ für ein $u \in U$ und folglich $w \in \operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)})$.

"$\supset$": Sei $w \in \operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)})$, dann gilt $w = S(v)$ für ein $v \in \operatorname{Im}(T)$. Wegen $v \in \operatorname{Im}(T)$, existiert ein $u \in U$ mit $v = T(u)$ und folglich

$$w = S(T(u)) = (S \circ T)(u) \in \operatorname{Im}(S \circ T)$$

Aus der Diskussion folgt $\operatorname{Rang}(S \circ T) \leq \operatorname{Rang}(S)$, da $\operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)}) \subseteq \operatorname{Im}(S)$.

Aus der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rang}(S|_{\operatorname{Im}(T)}) + \operatorname{nullity}(S|_{\operatorname{Im}(T)}) \geq \operatorname{Rang}(S \circ T)$$

und folglich $\operatorname{Rang}(S \circ T) \leq \operatorname{Rang}(T)$.

Beides zusammen liefert

$$\operatorname{Rang}(S \circ T) \leq \min\{\operatorname{Rang}(T), \operatorname{Rang}(S)\}$$

2. **a)** **“$\Leftarrow$”** Falls $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Basiswechselmatrix ist, dann existiert ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit geordneten Basen $\tilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$, sodass $A = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, gelten

$$I_n = [\mathrm{id}_V]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = [\mathrm{id}_V]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = [\mathrm{id}_V]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}}A$$
$$I_n = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}[\mathrm{id}_V]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}} = A[\mathrm{id}_V]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}}$$

und folglich ist $[\mathrm{id}_V]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}}$ eine Inverse von A.

“$\Rightarrow$” Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Wir behaupten, dass die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden und $A = [\mathrm{id}_{\mathbb{K}}]^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{B}}$ ist, wobei $\mathcal{B} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ die geordnete Basis bestehend aus den Spalten von A ist. A ist invertierbar, bzw. dazu äquivalent $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist invertierbar. Insbesondere ist L_A surjektiv. Sei $w \in \mathbb{K}^n$ beliebig, dann existiert also ein $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $w = L_A(v) = Av$. Nach Konstruktion der Matrixmultiplikation gilt

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}v_k = \sum_{k=1}^{n} v_k A_{ik}$$

und folglich

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{n} w_i e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k A_{ik}\right) e_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik} e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} v_k A^{(k)}. \end{aligned}$$

Da $w \in \mathbb{K}^n$ beliebig war, bilden die Spalten von A also ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$. Es bleibt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gegeben, sodass gilt

$$0 = \lambda_1 A^{(1)} + \cdots + \lambda_n A^{(n)}.$$

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ der Vektor mit Einträgen $v_i = \lambda_i$, dann gilt also nach obiger Formel $0 = Av = L_A(v)$ und folglich ist $v \in \mathrm{Ker}(L_A) = \{0\}$. Insbesondere folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ und somit sind die Spalten von A linear unabhängig. Sei also $\mathcal{B} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ und $Q = [\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}]^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{B}}$, dann ist nach Konstruktion

$$Q^{(j)} = [A^{(j)}]_{\mathcal{E}_n} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i = A^{(j)},$$

und folglich $Q = A$. Also ist A eine Basiswechselmatrix.

b) Aus der Dimensionsformel folgt, dass

$$n = \dim \mathbb{K}^n = \mathrm{Rang}(L_A) + \mathrm{Ker}(L_A) \geq \mathrm{Rang}(L_A)$$

Siehe nächstes Blatt!

Da $\operatorname{Im}(L_A)$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^m$ ist, ist

$$\operatorname{Rang}(L_A) = \dim \operatorname{Im}(L_A) \leq \dim \mathbb{K}^m = m$$

und beides zusammen liefert

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(L_A) \leq \min\{m, n\}$$

Für die zweite Aussage kann man auf mehrere Arten vorgehen. Eine Möglichkeit ist eine brachiale Induktion nach m, der Anzahl Zeilen von A, die wir im Folgenden ausführen. Alternativ geben wir ein Argument, das eine geometrische Begründung für die Korrektheit der Aussage enthält, und darum eigentlich das "richtigere" Argument ist. Zuerst das
geometrische Argument:
Zuerst stellen wir fest, dass die Aussage dazu äquivalent ist, dass Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_r \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ und $F_1, \ldots F_s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existieren, sodass gilt

$$D = E_1 \cdots E_r A F_s \cdots F_1.$$

Wir haben nämlich in der Vorlesung gezeigt, dass jede Anwendung einer elementaren Umformung äquivalent ist zur entsprechenden Multiplikation mit einer Elementarmatrix. Die Aussage folgt dann nach endlicher Induktion.

Behauptung 1: Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann existieren geordnete Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ von V, W, sodass

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

wobei $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$, $r = \operatorname{Rang}(T)$ und $0_{k\times l} \in M_{k\times l}(\mathbb{K})$ die Matrix mit allen Einträgen gleich 0 ist. Im Folgenden bezeichnen wir Matrizen letzterer Form einfach mit 0 und ignorieren die Indizes, wenn die Dimensionen aus dem Kontext klar ersichtlich sind.

Beweis. Falls $r = 0$ ist, dann ist $T = 0$ und es ist nichts zu zeigen (da $T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ für alle Wahlen von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ linear ist). Sei im Folgenden also $r \geq 1$. Wähle eine Basis $(w_1, \ldots, w_r)$ von $\operatorname{Im}(T)$. Weil die Abbildung T von V auf $\operatorname{Im}(T)$ surjektiv ist, existieren $v_1, \ldots, v_r \in V$, sodass $T(v_i) = w_i$ gilt. Die Liste $(v_1, \ldots, v_r)$ ist linear unabhängig. Seien nähmlich $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, sodass $0 = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$ ist, dann folgt aus der Linearität von T, dass

$$0 = T(0) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j w_j$$

und aus der linearen Unabhängigkeit von $(w_1, \ldots, w_r)$ folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Insbesondere gilt also $\dim\langle v_1, \ldots, v_r\rangle = r$. Sei im Folgenden $U = \langle v_1, \ldots, v_r\rangle$.

Bitte wenden!

Wir behaupten, dass $V = U \oplus \mathrm{Ker}(T)$ ist. Sei hierfür $v \in \mathrm{Ker}(T) \cap U$, dann ist insbesondere $T(v) = 0$. Da $v \in U$ ist, existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, sodass $v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j$ und somit ist

$$0 = T(v) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(v_j) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j w_j,$$

und folglich $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$, insbesondere also $v = 0$, also $U \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ (dasselbe Argument beweist, dass $T|_U$ injektiv ist). Es bleibt noch zu zeigen, dass $V = U + \mathrm{Ker}(T)$ ist. Sei also $v \in V$, dann existieren durch $(w_1, \ldots, w_r)$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, sodass $T(v) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j w_j$ ist. Sei $u = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j$, dann ist $u \in U$ und für $v_0 = v - u$ gilt

$$T(v_0) = T(v) - T(u_0) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j w_j - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(v_j) = 0,$$

also ist $v_0 \in \mathrm{Ker}(T)$ und somit $v = u + v_0 \in U + \mathrm{Ker}(T)$. Da $v \in V$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Aus der Dimensionsformel folgt $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(V) - \mathrm{Rang}(T) = n - r$. Wähle nun eine Basis $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von $\mathrm{Ker}(T)$, dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Seien nämlich $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$, dann ist $U \ni \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = -\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j v_j \in \mathrm{Ker}(T)$, und aus $\{0\} = U \cap \mathrm{Ker}(T)$ folgt also $0 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j v_j$. Da $(v_1, \ldots, v_r)$ und $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ linear unabhängig sind, folgt also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Insbesondere ist also $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig und da $\dim(V) = n$ ist, ist wie in der Vorlesung gezeigt wurde $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

Es ist eine Folgerung des Steinitz'schen Austauschsatzes, dass $w_{r+1}, \ldots, w_m \in W$ existieren, sodass $(w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von W ist. Im Folgenden seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$. Es ist nach Konstruktion

$$[T(v_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{cases} e_i & \text{falls } 1 \leq i \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit folgt die Behauptung. $\square$

Aus der vorangehenden Aussage folgt insbesondere, dass Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ existieren, sodass gilt $[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ die gewünschte Form hat. Wegen

$$[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{C}} [L_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_n} [\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n} = [\mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{C}} A [\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$$

reicht es also zu zeigen, dass sich jede Basiswechselmatrix als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt.

Behauptung 2: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und seien $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$ zwei geordnete Basen von V, deren Einträge sich an genau einer Stelle unterscheiden. Dann ist die Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}_V]_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}$ ein Produkt von Elementarmatrizen.

Siehe nächstes Blatt!

Beweis. Seien $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, und sei $1 \leq k \leq n$, sodass entsprechend der Voraussetzung gilt

$$v_j = \tilde{v}_j \iff j \neq k.$$

Sei $\tilde{v}_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{ik} v_i$, dann gilt für die Matrix $Q = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$

$$Q_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } j \neq k \\ \lambda_{ik} & \text{sonst} \end{cases}$$

Da $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ eine Basis ist, gilt $\tilde{v}_k \notin \langle \{\tilde{v}_j | j \neq k\} \rangle = \langle \{v_j | j \neq k\} \rangle$, und folglich ist $\lambda_{kk} \neq 0$. Insbesondere lässt sich Q mittels Multiplikation der k-ten Zeile mit λ_{kk}^{-1} in die Form

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \lambda_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \lambda_{k-1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{mk} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

mit $v = (\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{k-1,k})^T$ und $w = (\lambda_{k+1,k} \dots, \lambda_{nk})^T$ überführen, wobei $v \in \mathbb{K}^{k-1}$, $w \in \mathbb{K}^{n-k}$. Um die Aussage zu beweisen, reicht es also aus, zu zeigen, dass jede Matrix dieser Form mittels elementarer Zeilen und Spaltenumformungen aus der Identität entsteht. Die k-te Spalte von $\tilde{Q}$ ist gegeben als

$$\tilde{Q}^{(k)} = \sum_{i \neq k} \lambda_{ik} I_n^{(i)} + I_n^{(k)},$$

und da für $j \neq k$ gilt $\tilde{Q}^{(j)} = I_n^{(j)}$, entsteht $\tilde{Q}$ mittels elementarer Spaltenumformungen aus der Identität. Dies zeigt, dass sich Q als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt. □

Behauptung 3: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$ geordnete Basen von V. Dann ist $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$ ein Produkt von Elementarmatrizen.

Beweis. Wir machen eine Induktion über die Anzahl der nicht-gemeinsamen Elemente von $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$.

Wir machen die Induktionsverankerung. Wenn sich $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$ in genau einem Element voneinander unterscheiden, dann ist die Aussage diejenige aus Behauptung 2, bis auf die dort getroffene zusätzliche Voraussetzung, dass die Einträge positionsweise an allen bis auf einer Stelle identisch sind. Wir müssen also noch

Bitte wenden!

zeigen, dass die Aussage auch gilt, falls nur alle Elemente bis auf eines gemeinsam sind, die Restriktion an die Anordnung aber nicht gilt. Hierfür reicht es zu zeigen, dass jede Basiswechselmatrix zwischen zwei geordneten Basen $\hat{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$, wobei die eine Basis eine Permutation der Elemente der ersten Basis darstellt, sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt, dann folgt die Aussage aus der Multiplikationsregel für Basiswechselmatrizen. Sei nämlich $\tilde{v}_i$ das Element in der Liste $\tilde{\mathcal{B}}$, das in $\mathcal{B}$ nicht vorkommt, und sei v das Element in $\mathcal{B}$, welches nicht in $\tilde{\mathcal{B}}$ vorkommt. Sei $\hat{\mathcal{B}}$ die geordnete Basis von V, die man erhält, indem man $\tilde{v}_i$ durch v ersetzt. Dann sind $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\hat{\mathcal{B}}$ geordnete Basen, deren Einträge an jeder bis auf eine Stelle übereinstimmen, und somit ist $[\mathrm{id}_V]^{\hat{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$ ein Produkt von Elementarmatrizen. $\mathcal{B}$ ist eine Permutation der Einträge von $\hat{\mathcal{B}}$, und es gilt

$$[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{B}}}[\mathrm{id}_V]^{\hat{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

Wenn also $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{B}}}$ ein Produkt von Elementarmatrizen ist, dann gilt dasselbe für $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

Für solche $\hat{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$ enthält jede Spalte und jede Zeile von $Q = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{B}}}$ genau einen Eintrag mit Wert 1 und alle anderen Einträge sind gleich 0. Angenommen die Aussage gilt für jede solche Matrix der Grösse $k \times k$ ($k \geq 1$) und sei $Q \in M_{(k+1)\times(k+1)}(\mathbb{K})$ ebenfalls von der beschriebenen Form. Dann existiert eine Vertauschung von zwei Spalten, welche Q in die Form.

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \qquad \tilde{Q} \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$$

überführt, wobei wieder jede Spalte und jede Zeile von $\tilde{Q}$ genau einen Eintrag mit Wert 1 und allen anderen Einträgen 0 enthält. Nach Induktionsannahme lassen sich also die zweite bis und mit n-te Spalte untereinander vertauschen, sodass Q' in die Identität überführt wird. Dies zeigt die gewünschte Aussage über Permutationen von Basen und vervollständigt die Induktionsverankerung.

Sei die Induktionsannahme also, dass die Aussage aus Behauptung 3 wahr ist für alle Paare von Basen, die sich in k oder weniger Einträgen unterscheiden, wobei $1 \leq k < n$ gegeben ist. Seien $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$ zwei Basen, die sich in $k+1$ Einträgen unterscheiden, und wähle einen Eintrag v von $\mathcal{B}$, der nicht in $\tilde{\mathcal{B}}$ vorkommt. Da $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist, ist $v \in V \setminus \{0\}$ und somit $\{v\}$ linear unabhängig. Nach dem Steinitz'schen Austauschsatz können wir einen Eintrag von $\tilde{\mathcal{B}}$ durch v ersetzen, sodass die resultierende Liste $\hat{\mathcal{B}}$ eine geordnete Basis ist. Die Basen $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\hat{\mathcal{B}}$ unterscheiden sich in einem, die Basen $\hat{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$ in k Elementen. Insbesondere lassen sich nach Induktionsannahme die Matrizen $[\mathrm{id}_V]^{\hat{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$ und $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{B}}}$ als Produkte von Elementarmatrizen schreiben, und somit gilt dasselbe für

$$[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{B}}}[\mathrm{id}_V]^{\hat{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

Also folgt die Aussage aus Induktion. $\square$

Siehe nächstes Blatt!

Beweis mittels Induktion:

"$m = 1$": Falls $A = 0$, dann ist $\mathrm{Rang}(L_A) = 0$, da $L_A(v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$ und folglich ist nichts zu zeigen.
Sei also $A \neq 0$, dann existiert ein $1 \leq j \leq n$ mit $A_{1j} \neq 0$. Da $L_A(e_j) = A_{1j} \neq 0$, ist $\mathrm{Rang}(L_A) \geq 1$ und wegen $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist $\mathrm{Rang}(L_A) = 1$.
Falls $j > 1$, vertauschen wir die Spalten $A^{(1)}$ und $A^{(j)}$, so dass wir im Folgenden annehmen können, dass A eine $1 \times n$-Matrix mit $A_{11} \neq 0$ ist. Wir multiplizieren nun die erste Spalte von A mit A_{11}^{-1}, so dass wir im Folgenden annehmen können, dass A eine $1 \times n$-Matrix mit $A_{11} = 1$ ist. Falls $n = 1$, dann sind wir fertig. Andernfalls addieren wir für $j \leq 2 \leq n$ das $-A_{1j}$-fache der ersten Spalte zur j-ten Spalte, so dass danach $A_{1j} = 0$ für $j \geq 2$ und folglich $A = e_1^T$, wie gewünscht.

"$m > 1$": Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \qquad B \in M_{m-1\times n}(\mathbb{K}), C \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$$

Sei $r_B := \mathrm{Rang}(B)$. Nach Induktionsannahme existieren elementare Zeilen- und Spaltenumformungen, die A in A' überführen, so dass

$$A' = \begin{pmatrix} D_B \\ C' \end{pmatrix} \qquad D_B \in M_{m-1\times n}(\mathbb{K}), C' \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$$

mit D_B eine Diagonalmatrix für B wie in der Aufgabenstellung. Wir addieren nun das $-C'_{1j}$-fache der j-ten Zeile zur m-ten Zeile für $1 \leq j \leq r_B$ und können also annehmen, dass $C'_{1j} = 0$ für $1 \leq j \leq r_B$. Das heisst, wir haben mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen A in eine Matrix

$$A'' = \begin{pmatrix} I_{r_B} & 0_{r_B\times(n-r_B)} \\ 0_{(m-r_B-1)\times r_B} & 0_{(m-r_B-1)\times(n-r_B)} \\ 0_{1\times r_B} & C'' \end{pmatrix}$$

überführt, wobei $C'' \in M_{1\times(n-r_B)}(\mathbb{K})$. Da elementare Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang erhalten, gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A'')$.
Da die Spalten $(A'')^{(j)}$ für $1 \leq j \leq r_B$ linear unabhängig sind, gilt $\mathrm{Rang}(A'') \geq r_B$. Andererseits sind die Spalten $(A'')^{(j)}$ für $r_{B+1} \leq j \leq n$ sicherlich linear abhängig, da sie allesamt Vielfache des Vektors $e_m \in \mathcal{E}_m$ sind. Also ist $\mathrm{Rang}(A) \in \{r_B, r_B + 1\}$.
Angenommen $\mathrm{Rang}(A) = r_B$, dann ist $\dim \mathrm{Im}(L_{A''}) = r_B$ und folglich ist $C'' = 0_{1\times(n-r_B)}$ und A'' hat die gewünschte Form.
Falls $\mathrm{Rang}(A) = r_B + 1$, dann existiert ein $r_B < j \leq n$, so dass $C''_{1j} \neq 0$. Nach vertauschen der j-ten und der $(r_B + 1)$-ten Spalten von A'' können wir annehmen, dass $C''_{1(r_B+1)} \neq 0$. Wir multiplizieren die $(r_B + 1)$-te Spalte von A'' mit $(C''_{1(r_B+1)})^{-1}$ und können im Folgenden annehmen, dass $C''_{1(r_B+1)} = 1$.

Bitte wenden!

Nun addieren wir für $1 < j \leq r_B - n$ das $-C''_{1(r_B+j)}$-fache der (r_B+1)-ten Spalte von A'' zur (r_B+j)-ten Spalte von A'' und erhalten aus A'' mittels elementarer Spaltenumformungen eine Matrix A''' von der Form

$$A'' = \begin{pmatrix} I_{r_B} & 0_{r_B \times (n-r_B)} \\ 0_{(m-r_B-1)\times r_B} & 0_{(m-r_B-1)\times(n-r_B)} \\ 0_{1\times r_B} & e_1^T \end{pmatrix} \quad (e_1 \in \mathcal{E}_{n-r_B})$$

Nach vertauschen der (r_B+1)-ten Zeile und der m-ten Zeile von A''' erhalten wir eine Matrix

$$D = \begin{pmatrix} I_{r_B+1} & 0_{(r_B+1)\times(n-(r_B+1))} \\ 0_{(m-(r_B+1))\times(r_B+1)} & 0_{(m-(r_B+1))\times(n-(r_B+1))} \end{pmatrix}$$

wie gewünscht.

3. Wir erinnern daran, dass $L_{FAG} = L_F \circ L_A \circ L_G$ und dass wegen der Invertierbarkeit von F und G auch L_F und L_G invertierbar, und also bijektiv sind.

a) Wegen der Invertierbarkeit von L_F ist $\mathrm{Ker}(L_F) = \{0\}$, und folglich

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(L_{FAG}) &\Leftrightarrow 0 = L_{FAG}(v) = L_F\big((L_A \circ L_G)(v)\big) \\ &\Leftrightarrow 0 = (L_A \circ L_G)(v) = L_A\big(L_G(v)\big) \\ &\Leftrightarrow L_G(v) \in \mathrm{Ker}(L_A) \\ &\Leftrightarrow v \in L_G^{-1}\big(\mathrm{Ker}(L_A)\big) \end{aligned}$$

und folglich $\mathrm{Ker}(L_A) = L_G\big(\mathrm{Ker}(L_{FAG})\big)$.

Für die Aussage über das Bild verwenden wir die Surjektivität von L_G^{-1}:

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Im}(L_{FAG}) &\Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathbb{K}^n : \; w = L_{FAG}(v_1) \\ &\Leftrightarrow \exists v_2 \in \mathbb{K}^n : \; w = L_{FAG}\big(L_G^{-1}(v_2)\big) = L_F\big(L_A(v_2)\big) \\ &\Leftrightarrow w \in L_F\big(\mathrm{Im}(L_A)\big) \end{aligned}$$

und folglich $\mathrm{Im}(L_A) = L_F^{-1}\big(\mathrm{Im}(L_{FAG})\big) = L_{F^{-1}}\big(\mathrm{Im}(L_{FAG})\big)$.

Die Aussagen beweisen die Behauptung nach Anpassung der Notation.

b) Es gilt per definitionem

$$\mathrm{Rang}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \mathrm{Rang}(L_{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}}).$$

Seien $\psi : W \to \mathbb{K}^{\dim(W)}$ und $\phi : V \to \mathbb{K}^{\dim(V)}$ die Isomorphismen gegeben durch Koordinatenwahl $\psi(w) = [w]_{\mathcal{C}}$ und $\phi(v) = [v]_{\mathcal{B}}$ (für $v \in V$ und $w \in W$).

Siehe nächstes Blatt!

Wir wissen aus der Vorlesung, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{K}^{\dim(V)} \arrow[r, "L_{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}}"'] & \mathbb{K}^{\dim(W)} \end{tikzcd}$$

und somit ist $L_{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}} = \psi \circ T \circ \phi^{-1}$, also insbesondere

$$\operatorname{Rang}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \operatorname{Rang}(\psi \circ T \circ \phi^{-1}).$$

Da ϕ^{-1} surjektiv ist, ist $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T \circ \phi^{-1})$. Da ψ injektiv ist, bildet ψ jede linear unabhängige Teilmenge von W auf eine linear unabhängige Menge ab, und somit ist $\dim \operatorname{Im}(\psi \circ S) \geq \dim \operatorname{Im}(S)$ für jede beliebige lineare Abbildung S von einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum U nach W. Andererseits gilt aufgrund der Dimensionsformel $\operatorname{Rang}(\psi \circ S) \leq \operatorname{Rang}(S)$ im Allgemeinen. Folglich ist nach Kombination beider Argumente

$$\operatorname{Rang}(T) = \operatorname{Rang}(T \circ \phi^{-1}) = \operatorname{Rang}(\psi \circ T \circ \phi^{-1}) = \operatorname{Rang}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}).$$

c) Um unsere Vorgehensweise zu motivieren, bemerken wir, dass das Bild von L_A gegeben ist durch die lineare Hülle der Spalten von A

$$\operatorname{Im}(L_A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Dies haben wir im Rahmen der Diskussion linearer Abbildung ausführlich besprochen. Um eine Basis von $\operatorname{Im}(L_A)$ zu bestimmen, müssten wir eine maximale, linear Unabhängige Teilmenge des obigen Erzeugendensystem suchen, was mit probieren im Allgemeinen nicht einfach ist. Darum verwenden wir stattdessen Teilaufgabe (a) und das Resultat aus Aufgabe 2, d.h. wir finden Produkte $\tilde{F}, \tilde{G}$ von Elementarmatrizen, so dass $\tilde{F} D \tilde{G} = A$ mit D wie in Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= F_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G_1} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$=F_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=:F_2} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\3&1&-2&0\end{pmatrix} G_1 \qquad (\tilde{F}_2 := F_1F_2)$$

$$=\tilde{F}_2 \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}}_{=:F_3} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix} G_1 \qquad (\tilde{F}_3 := \tilde{F}_2F_3)$$

$$=\tilde{F}_3 \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{=:G_2} G_1 \qquad (\tilde{G}_2 := G_2G_1)$$

$$=\tilde{F}_3 \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{=:F_4} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tilde{G}_2 \qquad (\tilde{F}_4 := \tilde{F}_3F_4)$$

$$=\tilde{F}_4 \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{=:G_3} \tilde{G}_2 \qquad (\tilde{G}_3 := G_3\tilde{G}_2)$$

Da es sich bei den Matrizen F_1, F_2, F_3, F_4 sowie G_1, G_2, G_3 allesamt um Elementarmatrizen handelt und da die invertierbaren Matrizen (für jede Dimension) eine Gruppe bilden, sind $\tilde{F}_4$ und $\tilde{G}_3$ invertierbar und für $F := \tilde{F}_4^{-1}$, $G := \tilde{G}_3^{-1}$ gilt

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = FAG$$

Der Vorteil oben durchgeführter Umformungen ist, dass man aus FAG sofort eine Basis des Bildes sowie des Kernes ablesen kann. Im Folgenden ist $e_i \in \mathcal{E}_k$ der i-te Vektor der Standardbasis von $\mathbb{K}^k$ ($k = 3, 4$). Wir sehen, dass $e_3, e_4 \in \operatorname{Ker}(L_{FAG})$ – insbesondere gilt $\operatorname{nullity}(L_{FAG}) \geq 2$ – und wegen

$$\operatorname{Im}(L_{FAG}) = \operatorname{span}\{(FAG)^{(j)} \mid 1 \leq j \leq 4\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2\},$$

dass $\operatorname{Rang}(L_{FAG}) = 2$. Aus der Dimensionsformel folgt

$$\operatorname{nullity}(L_{FAG}) = \dim \mathbb{K}^4 - \operatorname{Rang}(L_{FAG}) = 4 - 2 = 2$$

und somit ist $\{e_3, e_4\}$ eine Basis von $\operatorname{Ker}(L_{FAG})$. Da invertierbare Abbildungen linear unabhängige Mengen auf linear unabhängige Mengen abbilden, sind nach

Siehe nächstes Blatt!

Teilaufgabe (a) die Mengen $L_G(\{e_3, e_4\}) = \{L_G(e_3), L_G(e_4)\}$ beziehungsweise $L_{F^{-1}}(\{e_1, e_2\}) = \{L_{F^{-1}}(e_1), L_{F^{-1}}(e_2)\}$ Basen von $\mathrm{Ker}(L_A)$ beziehungsweise von $\mathrm{Im}(L_A)$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} F^{-1} =& \tilde{F}_4 = F_1 F_2 F_3 F_4 \\ =& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ G =& \tilde{G}_3^{-1} = (G_3 G_2 G_1)^{-1} = G_1^{-1} G_2^{-1} G_3^{-1} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Im}(L_A)$ und

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Ker}(L_A)$.

d) 1. Wir berechnen

$$\begin{aligned} A =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Somit ist A ein Produkt von Matrizen vollen Ranges (nämlich ein Produkt von Elementarmatrizen) und somit die Darstellungsmatrix einer Verknüpfung bijektiver Abbildungen und als solche insbesondere die Darstellungsmatrix einer surjektiven Abbildung. Folglich hat A vollen Rang, d.h. $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

2. In $\mathbb{F}_2$ gilt $1 + 1 = 0$, also ist

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Somit ist A von der Form $A = F \left(\begin{smallmatrix}I_2 & 0_{2\times1}\\ 0_{1\times2} & 0\end{smallmatrix}\right) G$, wobei F, G Produkte von Elementarmatrizen sind. Da Elementarmatrizen den Rang erhalten, folgt

$$
\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix}I_2 & 0_{2\times1}\\ 0_{1\times2} & 0\end{pmatrix} = 2
$$

4. Wir bezeichen im Folgenden mit “$\longrightarrow$” die Überführung einer Matrix in eine andere Matrix mittels elementarer Zeilen- bzw. Spaltenumformung, wobei wir $\longrightarrow$ indizieren

- mit λZ_i (bzw. λS_j) im Falle der elementaren Umformung Multiplikation der i-ten Zeile (bzw. der j-ten Spalte) mit $\lambda \in \mathbb{R}$,

Siehe nächstes Blatt!

- mit $Z_i \leftrightarrow Z_{i'}$ (bzw. $S_j \leftrightarrow S_{j'}$) im Falle der elementaren Umformung Vertauschung der i-ten und der i'-ten Zeile (bzw. der j-ten und der j'-ten Spalte)
- und mit $Z_i + \lambda Z_{i'}$ (bzw. $S_j + \lambda S_{j'}$) im Falle der elementaren Umformung Addition des λ-fachen der i'-ten Zeile zur i-ten Zeile (bzw. des λ-fachen der j'-ten Spalte zur j-ten Spalte).

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
(A_1 \mid I_2) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

und folglich ist

$$
A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Ebenso berechnen wir

$$
\begin{aligned}
(A_2 \mid I_4) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_2 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{Z_4-Z_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4-Z_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4-Z_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right)$$

Also ist

$$A_2^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Schlussendlich berechnen wir

$$(A_3 \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\xrightarrow{Z_2+Z_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-2Z_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4-3Z_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 7 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -5 & 7 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4+Z_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-5Z_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -4 & 1 & -5 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+6Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-2Z_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+3Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2\leftrightarrow Z_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11} Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 - 2Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 - 7Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 35/11 & -16/11 & 13/11 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$

Folglich ist

$$A_3^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 35 & -16 & 13 & -22 \\ 11 & 0 & 11 & -11 \\ 10 & -3 & 10 & -11 \\ -16 & 7 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

5. Wir berechnen

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}}_{=:R}$$

R hat die gewünschte Form und für

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

gilt $BA = R$. Man kann B berechnen, indem man das Produkt der Inversen der oben auftauchenden Elementarmatrizen (in der richtigen Reihenfolge) bestimmt, oder mittels Gauss-Elimination. In der Notation zur Lösung von Aufgabe 3 liefert dies:

$$(B^{-1} \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+3Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & -1/4 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{array}\right)$$

und folglich ist

$$B = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 & 3/8 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$