Serie 23: Sylvesters Trägheitssatz & Singulärwertzerlegung

1. Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. Ein Unterraum $W \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *isotrop*, wenn ein Vektor $w \in W \setminus \{0\}$ existiert, sodass $Q(w) = 0$ gilt. Der Unterraum heisst *vollständig isotrop*, wenn $Q(w) = 0$ für alle $w \in W$ gilt.

Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ und sei die assoziierte symmetrische Bilinearform β_Q nicht ausgeartet. Bestimmen Sie die maximale Dimension eines vollständig isotropen Unterraumes.

2. $^\heartsuit$**a)** Zeigen Sie, dass die Singulärwerte einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ durch A eindeutig bestimmt sind.

b) Zeigen Sie, dass die Singulärwerte einer positiv definiten, symmetrischen Matrix mit ihren Eigenwerten übereinstimmen.

c) Zeigen Sie: jede symmetrische, positiv definite Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige symmetrische, positiv definite Quadratwurzel A, d.h. $A^2 = B$.

Hinweis: Konstruieren Sie unter Verwendung von B eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A zu von 0 verschiedenen Eigenwerten.

d) Sei $A = RDQ^T$ die Singulärwertzerlegung einer positiv definiten, symmetrischen Matrix. Zeigen Sie, dass $R = Q$.

3. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale euklidische Vektorräume und sei $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Bestimmen Sie $\|Tv\|_W$ für $v \in V$ in Abhängigkeit von der Singulärwertzerlegung von T. Bestimmen Sie $\max\{\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\}$ sowie $\min\{\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\}$.

Bitte wenden!

4. **a)** Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung von A^T.

5. **a)** Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$ und es bezeichne $P_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $[P_A]_{\mathcal{E}_m} = A(A^TA)^{-1}A^T$ gilt.

b) In der folgenden Aufgabe bestimmen wir die Regressionskoeffizienten in einem linearen Modell nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Gegeben seien Individuen $i \in \{1, \ldots, m\}$ sowie Merkmale $x_{i,j}$ $(1 \le j \le n)$ jedes Individuums sowie für jedes Individuum eine beobachtete resultierende Variable y_i.

Das lineare Modell lautet

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_n x_{i,n} + \epsilon_i,$$

d.h. die Hypothese ist: Es existieren $\beta_0, \ldots, \beta_n$, sodass

$$y = \beta_0 + \beta_1 x^{(1)} + \cdots + \beta_n x^{(n)} + \epsilon,$$

wobei $\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^m$ der nicht durch $x^{(1)}, \ldots, x^n$ erklärbare Fehler ist. Ziel der linearen Regression ist die Bestimmung von $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_n)$, sodass der *Fehler* $\psi(\epsilon)$ minimal wird für eine gegebene Funktion $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Im Folgenden sei $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$ der Vektor, dessen Einträge alle gleich 1 sind.

Nehmen Sie an, dass die Vektoren $(\mathbf{1}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ linear unabhängig sind und bestimmen Sie $\hat{\beta}$ im Falle $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_2$.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform ist symmetrisch.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Die Summe zweier symmetrischer bilinearformen ist eine symmetrische Bilinearform.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Je zwei symmetrische Matrizen mit demselben charakteristischen Polynom sind Darstellungsmatrizen derselben Bilinearform.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Die Singulärwerte eines linearen Operators sind mit seinen Eigenwerten identisch

(a) Richtig.

(b) Falsch.

6. Die Singulärwerte der Matrix A sind identisch mit den Eigenwerten der Matrix AA^T.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei A eine symmetrische Matrix, und sei λ ein Eigenwert von A. Dann ist λ ein Singulärwert von A.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. *Prüfung Sommer 2017:* Jede symmetrische, positiv definite Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige Quadratwurzel $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, d.h. $A^2 = B$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 26. April, vor 14:30 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.