Serie 24: Orthogonale Abbildungen, Jordan Normalform (Teil 1)

1. Im Folgenden sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidscher Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass Rotationen und Reflexionen auf V orthogonale Abbildungen sind.

$^\heartsuit$**b)** Angenommen $\dim(V) = 2$. Zeigen Sie:

1. Jeder orthogonale Endomorphismus T auf V ist entweder eine Reflexion oder eine Rotation. Zeigen Sie zudem:
   - T ist genau dann eine Reflexion, wenn $\det(T) = -1$,
   - T ist genau dann eine Rotation, wenn $\det(T) = 1$.
2. Die Komposition einer Rotation und einer Reflexion ist eine Reflexion.

c) Sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Angenommen $\{W_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ ist eine Familie paarweise orthogonaler T-invarianter Unterräume von V, sodass

1. $1 \leq \dim(W_i) \leq 2$ für $1 \leq i \leq m$
2. sowie $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

Sei $s = |\{1 \leq i \leq m \mid T|_{W_i} \text{ ist eine Reflexion}\}|$. Zeigen Sie, dass $\det(T) = (-1)^s$ gilt.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidscher Vektorraum und sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V.

a) Zeigen Sie, dass orthogonale Endomorphismen $T_1, \ldots, T_m$ auf V existieren, sodass gelten:

Bitte wenden!

1. Für alle $1 \leq i \leq m$ ist T_i entweder eine Rotation oder eine Reflexion,
2. es gibt maximal ein $1 \leq i \leq m$, sodass T_i eine Reflexion ist,
3. für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt $T_i T_j = T_j T_i$,
4. $T = T_1 \cdots T_m$, und
5. es ist

$$\det(T) = \begin{cases} 1 & \text{falls } T_i \text{ eine Rotation ist für alle } 1 \leq i \leq m \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie: Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass die Darstellungsmatrix von T bezüglich $\mathcal{B}$ eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m \end{pmatrix}$$

ist, wobei für alle $1 \leq i \leq m$ die Matrix D_i entweder eine 1×1-Matrix (± 1) oder eine 2×2-Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{smallmatrix}\right)$ mit $a_i^2 + b_i^2 = 1$ über $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie zudem, dass man im Falle $\det(T) = 1$ alle 1×1 Blockdiagonaleinträge gleich 1 wählen kann.

c) Sei $A \in \mathrm{SO}(3) = \{A \in \mathrm{O}(3) \mid \det(A) = 1\}$. Zeigen Sie, dass A ähnlich ist zu einer Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

3. Zeigen Sie den Satz vom Fussball: In jedem Fussballspiel, in dem nur ein Ball verwendet wird, gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balles, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf demselben Anstosspunkt liegt) an der gleichen Stelle im umgebenden Raum befinden.

a) Überlegen Sie sich eine Beweisskizze unter Verwendung der folgenden Tatsache, die wir im Folgenden beweisen werden:

Theorem: Sei $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$, wobei $\|\cdot\|$ die Norm zum standard inneren Produkt auf $\mathbb{R}^3$ sei. Sei $f : S^2 \to S^2$ eine Isometrie, das heisst für alle $v, w \in S^2$ gilt

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|.$$

Dann existiert ein durch f eindeutig bestimmter orthogonaler Endomorphismus $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f = T|_{S^2}$ ist.

b) Sei $f : S^2 \to S^2$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in S^2$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

c) Sei $f : S^2 \to S^2$ eine Isometrie und sei $v \in S^2$. Geben Sie eine Formel für $f(v)$ an und folgern Sie, dass f eine eindeutige orthogonale Erweiterung auf ganz $\mathbb{R}^3$ besitzt.

d) Folgern Sie den Satz vom Fussball.

4. Beweisen Sie das folgende Korollar aus der Vorlesung: Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und nehme an, dass $\mathrm{char}_T(X)$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann sind folgende äquivalent:

1. T ist diagonalisierbar.
2. Für alle $\lambda \in \sigma(T)$ gilt $E_\lambda = K_\lambda$.

5. Zeigen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Seien γ_1, γ_2 zwei Zyklen zu verschiedenen Endvektoren zum Eigenwert λ. Dann sind γ_1 und γ_2 als Teilmengen von V disjunkt.

Bitte wenden!

6. Online-Abgabe

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Dann ist T entweder eine Rotation oder eine Reflexion.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein zweidimensionaler Euklidscher Vektorraum. Die Komposition zweier Rotationen auf V ist eine Rotation.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein dreidimensionaler Euklidscher Vektorraum. Dann ist das Produkt zweier Rotationen auf V eine Rotation auf V.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein vierdimensionaler Euklidscher Vektorraum. Dann ist die Komposition zweier Rotationen eine Rotation.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Dann ist die Identität eine Rotation.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

6. Sei $(V, \langle, \cdot, \cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Die Komposition zweier Reflexionen auf V ist eine Reflexion.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Sei $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und T ein orthogonaler Endomorphismus auf V. Dann ist T eine Komposition von Rotationen.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Sei $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei T ein orthognaler Endomorphimus auf V und sei $\det(T) = -1$. Dann ist T eine Reflexion.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

9. Jede Reflexion eines endlichdimensionalen Euklidschen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

10. Jede Rotation eines endlichdimensionalen Euklidschen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

11. *Prüfung Winter 2017:* Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V und sei $\det(T) = -1$. Dann ist T eine Reflexion.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 3. Mai, vor 14:30 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.