

## Serie 25: Jordan Normalform (Teil 2)

1. Bestimmen Sie die Jordan Normalform der Matrizen

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

über  $\mathbb{C}$ ,

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{F}_3$ .

2. Im Folgenden sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper. Seien  $p, q \in \mathbb{K}[X]$ . Wir sagen  $p$  teilt  $q$  (geschrieben  $p|q$ ), falls ein Polynom  $r \in \mathbb{K}[X]$  existiert, sodass  $q = pr$  gilt. Ein Polynom  $q \in \mathbb{K}[X]$  mit Grad mindestens 1 heisst *irreduzibel*, falls

$$p|q \wedge \deg(p) \geq 1 \implies \exists a \in \mathbb{K}^\times : q = ap.$$

*Bemerkung:* Zur Lösung dieser Aufgabe sollten Sie die Polynomdivision und die Eigenschaften von Nullstellen eines Polynoms aus den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 im Analysisskript verwenden für allgemeine Körper  $\mathbb{K}$  verwenden.

a) Zeigen Sie, dass die nicht-trivialen linearen Polynome, d.h. alle Polynome von Grad 1, irreduzibel sind.

**Bitte wenden!**

b) Seien  $p, q, r \in \mathbb{K}[X]$  Polynome und sei  $p$  ein Polynom vom Grad 1. Zeigen Sie

$$p|qr \implies p|q \vee p|r.$$

c) Sei  $q \in \mathbb{K}[X]$  ein normiertes Polynom und seien  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}[X]$  normierte Polynome vom Grad 1, sodass  $q = p_1 \cdots p_n$  gilt (d.h.  $q$  zerfällt über  $\mathbb{K}$  in Linearfaktoren oder auf Englisch  $q$  splits). Zeigen Sie, dass die Faktorisierung bis auf Permutation der Faktoren eindeutig durch  $q$  bestimmt ist.

Formal: Seien  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m \in \mathbb{K}[X]$  normiert und von Grad 1, sodass  $q = \tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_m$ . Dann ist  $m = n$  und es existiert eine Bijektion  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ , sodass  $\tilde{p}_i = p_{\sigma(i)}$  für  $1 \leq i \leq n$ .

d) Seien  $q, r \in \mathbb{K}[X]$  und sei  $p \in \mathbb{K}[X]$  ein Polynom vom Grad 1. Angenommen  $r|q, p^m|r, p^n|q$  sowie  $p^{n+1} \nmid q$  für  $m, n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $m \leq n$  ist.

3. a) Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  und nehmen Sie an, dass  $\text{char}_A(X)$  in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass  $A$  ähnlich ist zu einer Matrix in Jordan Normalform.

b) Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Zeigen Sie, dass  $A$  und  $A^T$  zueinander ähnlich sind.

4. <sup>♡</sup>a) Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  und nehmen Sie an, dass  $\text{char}_A(X)$  in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass eine Diagonalmatrix  $D \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  und eine nilpotente Matrix  $N \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  existieren, sodass  $DN = ND$  gilt und  $A$  ähnlich ist zu  $D + N$ .

b) Zeigen Sie, dass sich jede invertierbare Matrix  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  als Produkt  $Q = DU$  schreiben lässt, wobei  $D$  diagonalisierbar und  $U - I_n$  nilpotent ist und  $DU = UD$  gilt.

c) Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Zeigen Sie, dass  $\exp(A)$  wohldefiniert ist.

d) Seien  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Zeigen Sie

$$AB = BA \implies \exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

e) Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Zeigen Sie, dass  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$  ist und folgern Sie insbesondere, dass  $\exp(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  für alle  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Bestimmen Sie  $\exp(A)^{-1}$ .

\*f) Seien  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  und  $g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l$  Potenzreihen mit Konvergenzradien  $R_f, R_g > 0$ . Sei gegeben  $z_0 \in \mathbb{C}$ , sodass  $|z_0| < R_g$  und  $\sum_{l=0}^{\infty} |b_l z_0^l| < R_f$  ist. Zeigen Sie, dass eine Potenzreihe  $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$  sowie ein  $\delta > 0$  existieren, sodass für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < \delta$  gilt  $\sum_{l=0}^{\infty} |b_l z^l| < R_f$  und  $f(g(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

Verwenden Sie hierfür, dass für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  die Potenz  $g(z)^k$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist und schreiben Sie  $g(z)^k = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(k)z^m$ . Wählen Sie

$$c_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_m(k).$$

*Bemerkung:* Diese Teilaufgabe ist eine Aufgabe in Analysis I, deswegen ist sie nicht Teil des Prüfungstoffes für die Lineare Algebra.

- g)** Sei  $U \in GL_n(\mathbb{C})$  eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen alle gleich 1. Zeigen Sie, dass eine strikte obere Dreiecksmatrix  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  existiert, sodass  $\exp(A) = U$  ist. Folgern Sie, dass die Exponentialabbildung  $\exp : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  surjektiv ist.

*Hinweis:* Berechnen Sie die Matrix  $\exp(A)$  für

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (U - I_n)^k,$$

als Polynom in  $U - I_n$  und zeigen Sie, dass  $\exp(A) = U$  ist (vgl. Analysisskript, Abschnitt 8.1.2).

- h)** Sei  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  und sei  $v \in \mathbb{C}^n$  beliebig. Zeigen Sie, dass Polynome  $p_{ij} \in \mathbb{C}[X]$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) sowie  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  existieren, sodass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(Q^k v)_i = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j k} p_{ij}(k) \quad (1 \leq i \leq n).$$

*Bemerkung:* Diese Tatsache wird Ihnen in der Analysis bei der Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen in leicht veränderter Form wieder begegnen. Sie können aus dieser Aufgabe die Formen von Lösungen solcher Systeme erkennen.

- 5.** Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  eine Matrix endlicher Ordnung, d.h.  $A^m = I_n$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $A$  diagonalisierbar ist.

**Bitte wenden!**

## 6. Online-Abgabe

1. Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3i \\ -3i & 6 \end{pmatrix}$  ist über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $T \in \text{End}(V)$  und  $v \in V \setminus \{0\}$  ein Eigenvektor von  $T$ . Dann ist  $v$  ein verallgemeinerter Eigenvektor von  $T$ .

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, und sei  $T \in \text{End}(V)$ . Falls  $\dim(V) < \infty$ , dann besitzt  $T$  eine Jordan Normalform.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Jeder Zyklus von verallgemeinerten Eigenvektoren ist eine geordnete, linear unabhängige Menge.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $T \in \text{End}(V)$ , und sei  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Eigenwert von  $T$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Zyklus von verallgemeinerten Eigenvektoren von  $T$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

(a) Richtig.

(b) Falsch.

**Siehe nächstes Blatt!**

**6.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei  $n = \dim(V)$ , und sei  $T \in \text{End}(V)$ , sodass  $\text{char}_T(X)$  in Linearfaktoren zerfällt. Sei  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Eigenwert von  $T$ . Dann ist  $K_\lambda = \text{Ker}((T - \lambda I_V)^n)$ .

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

**7. Prüfung Sommer 2017:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $T \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  und sei  $W \subseteq V$  gegeben durch

$$W = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I_V)^k(v) = 0\}.$$

Dann ist  $T - \lambda I_V|_W$  nilpotent.

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

**8. Prüfung Sommer 2017:** Hat eine  $3 \times 3$  Matrix  $A$  nur einen Eigenwert  $\lambda$  mit geometrischer Vielfachheit 3, so gilt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

**9. Prüfung Sommer 2017:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$  und sei  $T \in \text{End}(V)$  ein Operator endlicher Ordnung, d.h. es existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $T^k = I_V$  ist. Dann ist  $T$  diagonalisierbar.

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

**10. Prüfung Winter 2018:** Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist diagonalisierbar über  $\mathbb{C}$ , aber nicht über  $\mathbb{R}$ .

(a) Richtig.

(b) False.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Wegen Feiertag, ausnahmsweise am **Mittwoch**, den **9. Mai**, vor 14:30 Uhr im HG J 68 in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe.