

Lösung 26: Sesquilinearformen und \mathbb{C} -Skalarprodukte

1. a) Betrachte die Abbildung $M_{k \times l}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{l \times k}(\mathbb{C})$, $X \mapsto X^* = \overline{X}^T$. Diese Abbildung ist konjugiert linear, d.h. für alle $X, Y \in M_{k \times l}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$(X + \lambda Y)^* = X^* + \overline{\lambda} Y^*.$$

Dies folgt aus der Multiplikatitivität und der Additivität der komplexen Konjugation sowie der Linearität der Transposition, denn

$$\begin{aligned}(X + \lambda Y)^* &= \overline{X + \lambda Y}^T = (\overline{X} + \overline{\lambda Y})^T \\ &= \overline{X}^T + \overline{\lambda Y}^T = X^* + \overline{\lambda} Y^*.\end{aligned}$$

Dies zusammen mit der Distributivität der Matrixmultiplikation liefert für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, dass

$$\begin{aligned}\gamma(u_1 + \lambda u_2, v_1 + \mu v_2) &= (u_1 + \lambda u_2)^* A (v_1 + \mu v_2) = (u_1^* + \overline{\lambda} u_2^*) A (v_1 + \mu v_2) \\ &= u_1^* A v_1 + \overline{\lambda} u_2^* A v_1 + \mu u_1^* A v_2 + \overline{\lambda} \mu u_2^* A v_2 \\ &= \gamma(u_1, v_1) + \overline{\lambda} \gamma(u_2, v_1) + \mu \gamma(u_1, v_2) + \overline{\lambda} \mu \gamma(u_2, v_2).\end{aligned}$$

Dies beweist die definierenden Gleichungen für die Sesquilinearität nach Wahl von $u_2 = 0$ bzw. $v_2 = 0$ sowie $\lambda = 1$ bzw. $\mu = 1$.

- b) “ \Rightarrow ”: Angenommen γ ist nicht ausgeartet, dann existiert für jedes $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein $u \in \mathbb{C}^n$, sodass $u^* A v \neq 0$. Insbesondere ist $Av \neq 0$. Da $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt $\text{Ker}(L_A) = \{0\}$ und da $L_A \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$, folgt aus der Injektivität von L_A , dass L_A ein Isomorphismus ist, und somit insbesondere, dass A invertierbar ist.

“ \Leftarrow ”: Um die umgekehrte Implikation zu beweisen, zeigen wir dazu äquivalent, dass wenn γ nicht nicht ausgeartet – wir sagen ausgeartet – ist, die Darstellungsmatrix nicht invertierbar sein kann. Nehmen wir also an γ ist ausgeartet. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass $\gamma(u, v) = 0$ gilt für alle $u \in \mathbb{C}^n$. Dann ist insbesondere $\gamma(Av, v) = 0$, und somit

$$0 = \gamma(Av, v) = (Av)^* Av = \|Av\|^2,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm zum standard inneren Produkt auf \mathbb{C}^n ist. Wie in der Vorlesung und insbesondere in der Analysis diskutiert wurde, folgt daraus $Av = 0$ und somit ist $v \in \text{Ker}(L_A)$. Da $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ war, ist L_A nicht injektiv, insbesondere nicht invertierbar, und damit auch $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

c) Wir bemerken, dass analog zur Diskussion von Bilinearformen die Gleichung

$$\gamma(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v]_{\mathcal{B}}$$

gilt. Hierfür reicht es zu zeigen, dass die rechte Seite eine Sequilinearform auf V definiert, die auf einer Basis mit γ übereinstimmt. Angenommen, dies sei der Fall für eine geordnete Basis $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ von V , dann gilt für beliebige $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v'_i$ und $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v'_i$ die Gleichung

$$\begin{aligned} [u]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v]_{\mathcal{B}} &= \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i v'_i \right]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma) \left[\sum_{j=1}^n \beta_j v'_j \right]_{\mathcal{B}} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_j [v'_i]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v'_j]_{\mathcal{B}} = \sum_{i,j=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_j \gamma(v'_i, v'_j) \\ &= \gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v'_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v'_j \right) = \gamma(u, v). \end{aligned}$$

Wir wählen die Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, dann ist $[v_i]_{\mathcal{B}} = e_i$, wobei $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis auf \mathbb{C}^n ist. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, dann ist $e_i^* A e_j = A_{ij}$, und folglich

$$[v_i]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v_j]_{\mathcal{B}} = \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)_{ij} = \gamma(v_i, v_j)$$

nach Definition von $\psi_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Aussage zu:

“ \Rightarrow ”: Angenommen γ ist positiv definit, dann gilt für jede beliebige Basis \mathcal{B} von V und für jedes $v \in V \setminus \{0\}$, dass

$$0 < \gamma(v, v) = [v]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)[v]_{\mathcal{B}}.$$

Da die Abbildung $V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ surjektiv ist, folgt $x^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma)x > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und somit ist $\psi_{\mathcal{B}}(\gamma)$ positiv definit.

Siehe nächstes Blatt!

“ \Leftarrow ”: Angenommen es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , sodass $\psi_{\mathcal{B}}(\gamma)$ eine positiv definite Matrix ist, dann gilt wegen $[v]_{\mathcal{B}} \neq 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$, dass

$$0 < [v]_{\mathcal{B}}^* \psi_{\mathcal{B}}(\gamma) [v]_{\mathcal{B}} = \gamma(v, v),$$

und folglich ist γ positiv definit.

2. Wir haben in Aufgabe 1. gezeigt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Sesquilinearform definiert mit Darstellungsmatrix A bezüglich der Standardbasis \mathcal{E}_2 . Wir müssen also nur überprüfen, ob $\langle \cdot, \cdot \rangle$ schiefsymmetrisch und positiv ist.

Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Sesquilinearform genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn A hermitesch ist, d.h. $A^* = \overline{A}^T = A$. Es ist

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = A^T$$

und da \cdot^T eine Involution auf $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ist, folgt also $A^* = A$.

Für die Positivität berechnen wir

$$(\overline{x}, \overline{y}) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\overline{x} - i\overline{y}, i\overline{x} + 2\overline{y}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |x|^2 - ix\overline{y} + i\overline{x}y + 2|y|^2.$$

Seien $x = a + ib$ und $y = c + id$, dann ist

$$\begin{aligned} x\overline{y} &= (a + ib)(c - id) = ac + bd + i(bc - ad) \\ \overline{x}y &= (a - ib)(c + id) = ac + bd + i(ad - bc) \end{aligned}$$

und folglich

$$\overline{x}y - x\overline{y} = 2i(ad - bc).$$

Angenommen die Form wäre nicht positiv, dann finden wir $x, y \in \mathbb{C}$ nicht beide 0, sodass

$$\begin{aligned} 0 &\geq |x|^2 + 2|y|^2 - 2(ad - bc) \\ &= a^2 + b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2(ad - bc) \\ &= (a - d)^2 + d^2 + (b + c)^2 + c^2. \end{aligned}$$

Aber das ist absurd, denn entweder ist $y \neq 0$ und somit

$$0 < c^2 + d^2 \leq (a - d)^2 + d^2 + (b + c)^2 + c^2,$$

oder $y = 0$ und dann $x \neq 0$ und somit

$$0 < a^2 + b^2 = (a - d)^2 + d^2 + (b + c)^2 + c^2.$$

Bitte wenden!

3. Linearität des Riemannintegrals impliziert

$$\langle f_1 + \lambda f_2, g_1 + \mu g_2 \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle f_2, g_1 \rangle + \mu \langle f_2, g_1 \rangle + \bar{\lambda} \mu \langle f_2, g_2 \rangle$$

für alle $f_1, f_2, g_1, g_2 \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, da punktweise $\overline{f_1(t) + \lambda f_2(t)} = \overline{f_1(t)} + \bar{\lambda} \overline{f_2(t)}$ gilt. Daraus folgt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Sesquilinearform auf V definiert. Es bleibt zu zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit und hermitesch ist.

Um zu zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch ist, verwenden wir die Linearität des Integrals und erhalten für $f = f_r + i f_i, g = g_r + i g_i$, mit f_r, f_i, g_r, g_i reellwertig, dass

$$\begin{aligned} \langle g, f \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g_r(t) + i g_i(t)) (f_r(t) + i f_i(t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) g_r(t) + f_i(t) g_i(t) + i f_r(t) g_i(t) - i f_i(t) g_r(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) g_r(t) + f_i(t) g_i(t) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) g_i(t) - f_i(t) g_r(t) dt \\ \overline{\langle f, g \rangle} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) g_r(t) + f_i(t) g_i(t) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(t) g_r(t) - f_r(t) g_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) g_r(t) + f_i(t) g_i(t) dt - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(t) g_r(t) - f_r(t) g_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) g_r(t) + f_i(t) g_i(t) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) g_i(t) - f_i(t) g_r(t) dt \\ &= \langle g, f \rangle. \end{aligned}$$

Für die Tatsache, dass für stetige $f, g : [0, 2\pi]$ auch die Realteile f_r, g_r und die Imaginärteile f_i, g_i stetig sind, verweisen wir auf die Analysis Vorlesung, in der auch das Integral komplexwertiger stetiger Funktionen f auf einem kompakten Intervall I durch

$$\int_I f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_I \operatorname{Im}(f)(t) dt$$

definiert wurde.

Für die Positivität sei $f \in V \setminus \{0\}$, dann existiert ein $t_0 \in [0, 2\pi]$, sodass $f(t_0) \neq 0$. Da f stetig ist, existiert $\delta > 0$, sodass

$$\forall t \in [0, 2\pi] : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \frac{|f(t_0)|}{2}$$

und insbesondere folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung für $t \in [0, 2\pi]$ mit $|t - t_0| < \delta$, dass

$$|f(t)| \geq ||f(t_0)| - |f(t_0) - f(t)|| \geq \frac{|f(t_0)|}{2} > 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Im Folgenden seien $t_- = \max\{0, t_0 - \delta\}$ und $t_+ = \min\{2\pi, t_0 + \delta\}$. Aus der Monotonie des Riemannintegrals folgt

$$2\pi \langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \geq \int_{t_-}^{t_+} |f(t)|^2 dt \geq \frac{|f(t_0)|^2}{4} (t_+ - t_-) > 0.$$

4. a) Es gilt $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und da die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ \mathbb{R} -linear ist, ist auch Re \mathbb{R} -linear. Insbesondere folgt also

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle u_1 + \lambda u_2, v_1 + \mu v_2 \rangle &= \operatorname{Re}(\langle u_1, v_1 \rangle + \lambda \langle u_2, v_1 \rangle + \mu \langle u_1, v_2 \rangle + \lambda \mu \langle u_2, v_2 \rangle) \\ &= \operatorname{Re}\langle u_1, v_1 \rangle + \lambda \operatorname{Re}\langle u_2, v_1 \rangle + \mu \operatorname{Re}\langle u_1, v_2 \rangle + \lambda \mu \operatorname{Re}\langle u_2, v_2 \rangle \end{aligned}$$

für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und folglich ist $\operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform auf $V_{\mathbb{R}}$. Symmetrie folgt aus $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$, denn so folgt für $u, v \in V$, dass

$$\operatorname{Re}\langle v, u \rangle = \operatorname{Re}\overline{\langle u, v \rangle} = \operatorname{Re}\langle u, v \rangle.$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nach Voraussetzung ein komplexes inneres Produkt auf $V_{\mathbb{C}}$ ist, gilt $\langle v, v \rangle \in (0, \infty)$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und folglich ist

$$\operatorname{Re}\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0$$

für alle $v \in V$. Insbesondere ist $\operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit und somit ein reelles inneres Produkt auf $V_{\mathbb{R}}$.

Für die letzte Behauptung, sei $v \in V$, dann ist nach Voraussetzung

$$\operatorname{Re}\langle v, iv \rangle = \operatorname{Re}\left(\underbrace{i \langle v, v \rangle}_{\in \mathbb{R}}\right) = 0,$$

wie gewünscht.

- b) Wir bemerken zuerst, dass aus der Voraussetzung für beliebige $u, v \in V$ gilt

$$0 = \langle u + iv, i(u + iv) \rangle = \underbrace{\langle u, iu \rangle}_{=0} - \langle u, v \rangle + \langle iv, iu \rangle - \langle iv, v \rangle,$$

und wegen $\langle iv, v \rangle = -\langle iv, i^2v \rangle = 0$ gilt aufgrund der Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dass

$$\langle iu, iv \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Da $u, v \in V$ beliebig waren, ist die \mathbb{R} -lineare Abbildung $v \mapsto iv$ orthogonal und es gilt

$$\langle u, iv \rangle = -\langle iu, v \rangle \quad (u, v \in V).$$

Bitte wenden!

Seien $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$, dann gelten

$$\begin{aligned}
 \langle u_1 + u_2, v \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u_1 + u_2, v \rangle + i\langle iu_1 + iu_2, v \rangle \\
 &= \langle u_1, v \rangle + i\langle iu_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle + i\langle iu_2, v \rangle \\
 &= \langle u_1, v \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u_2, v \rangle_{\mathbb{C}}, \\
 \langle u, v_1 + v_2 \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u, v_1 + v_2 \rangle + i\langle iu, v_1 + v_2 \rangle \\
 &= \langle u, v_1 \rangle + i\langle iu, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle + i\langle iu, v_2 \rangle \\
 &= \langle u, v_1 \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u, v_2 \rangle_{\mathbb{C}}, \\
 \langle \lambda u, v \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle \alpha u + i\beta u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \alpha u, v \rangle_{\mathbb{C}} + \langle i\beta u, v \rangle_{\mathbb{C}} \\
 &= \langle \alpha u, v \rangle + i\langle i\alpha u, v \rangle + \langle i\beta u, v \rangle + i\langle -\beta u, v \rangle \\
 &= \alpha \langle u, v \rangle + \alpha i\langle iu, v \rangle + \beta \langle iu, v \rangle - \beta i\langle u, v \rangle \\
 &= \alpha (\langle u, v \rangle + i\langle iu, v \rangle) - i\beta (\langle u, v \rangle + i\langle iu, v \rangle) \\
 &= \overline{\lambda} \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}}, \\
 \langle u, \lambda v \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u, \alpha v + i\beta v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, \alpha v \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u, i\beta v \rangle_{\mathbb{C}} \\
 &= \langle u, \alpha v \rangle + i\langle iu, \alpha v \rangle + \langle u, i\beta v \rangle + i\langle iu, i\beta v \rangle \\
 &= \langle u, \alpha v \rangle + i\langle iu, \alpha v \rangle - \langle iu, \beta v \rangle + i\langle u, \beta v \rangle \\
 &= \alpha \langle u, v \rangle + i\alpha \langle iu, v \rangle - \beta \langle iu, v \rangle + i\beta \langle u, v \rangle \\
 &= \alpha (\langle u, v \rangle + i\langle iu, v \rangle) + i\beta (\langle u, v \rangle + i\langle iu, v \rangle) \\
 &= \lambda \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}}.
 \end{aligned}$$

Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ eine Sesquilinearform auf $V_{\mathbb{C}}$.

Sei $v \in V \setminus \{0\}$, dann ist

$$\langle v, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, v \rangle + i\langle iv, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0,$$

da wie oben gezeigt $\langle iv, v \rangle = -\langle v, iv \rangle = 0$.

Schliesslich ist

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v \rangle + i\langle iu, v \rangle = \langle v, u \rangle - i\langle u, iv \rangle = \langle v, u \rangle - i\langle iv, u \rangle = \overline{\langle v, u \rangle_{\mathbb{C}}}$$

und somit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein komplexes inneres Produkt auf $V_{\mathbb{C}}$.

5. a) Falls $v = 0$ ist, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $v \neq 0$, dann existieren $s_1, \dots, s_n \in S$ paarweise verschieden, sowie Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$ gilt. Sei $S' = \{s_1, \dots, s_n\} \subset S$. Falls $S = S'$, dann ist S endlich und somit gilt die Aussage sicherlich. Andernfalls sei $s \in S \setminus S'$ gilt

$$\langle v, s \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i, s \right\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \langle s_i, s \rangle = 0,$$

Siehe nächstes Blatt!

und da S' endlich ist, folgt die Behauptung. Insbesondere haben wir gezeigt, dass für jede Wahl $S' \subset S$, sodass $v \in \text{span}(S')$ ist, die Aussage

$$\forall s \in S \setminus S' : \langle v, s \rangle = 0$$

gilt.

- b)** Da u und v sich per definitionem als endliche Linearkombinationen von Elementen in S schreiben lassen, existiert $S' = \{s_1, \dots, s_n\} \subset S$ mit paarweise verschiedenen s_i , sodass $u, v \in \text{span}(S')$. Seien

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i s_i \text{ und } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i,$$

dann folgt $\langle u, s_i \rangle = \overline{\mu_i}$ und $\langle s_i, v \rangle = \lambda_i$ wegen der Sesquilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dass

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \mu_i s_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j s_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \overline{\mu_j} \underbrace{\langle s_i, s_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\mu_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u, s_i \rangle \langle s_i, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, s_i \rangle \overline{\langle v, s_i \rangle} = \sum_{s \in S} \langle u, s \rangle \overline{\langle v, s \rangle}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Konsequenz aus Teilaufgabe a) verwendet haben.

- 6.** Angenommen T wäre ein Endomorphismus wie in der Aufgabenstellung. Wähle eine geordnete ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$\forall v \in V : T(v) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, Tv \rangle v_i = \sum_{i=1}^n \overline{\gamma(v, v_i)} v_i.$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix von T gegeben durch

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\overline{\gamma(v_j, v_i)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Dies verwenden wir, um T zu konstruieren. Sei \mathcal{B} wie oben und sei γ eine beliebige Sesquilinearform auf V . Da die Abbildung $\text{End}(V) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C}), T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}$, wie in der Linearen Algebra I gezeigt wurde, ein Isomorphismus ist, existiert genau ein Endomorphismus $T_{\gamma} \in \text{End}(V)$ mit $[T_{\gamma}]_{\mathcal{B}} = \left(\overline{\gamma(v_j, v_i)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. Wir behaupten, dass T_{γ} die gewünschte Gleichung erfüllt.

Wir bemerken zuerst, dass die Wahl von \mathcal{B} als ONB von V impliziert, dass für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathcal{B}}^* [w]_{\mathcal{B}}. \quad (1)$$

Bitte wenden!

Tatsächlich erhalten Wir

$$[v_j]_{\mathcal{B}}^*[v_i]_{\mathcal{B}} = e_j^T e_i = \delta_{i,j} = \langle v_j, v_i \rangle$$

für $1 \leq i, j \leq n$ und da nach Aufgabe 1. die Abbildung $(v, w) \mapsto [v]_{\mathcal{B}}^*[w]_{\mathcal{B}}$ eine Sesquilinearform auf V definiert, folgt (1).

Sei $1 \leq i \leq n$, dann gilt nach vorangehender Beschreibung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle T_{\gamma} v_j, v_i \rangle = [T_{\gamma} v_j]_{\mathcal{B}}^*[v_i]_{\mathcal{B}} = \gamma(v_j, v_i).$$

Da T_{γ} linear ist, ist die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle T_{\gamma} v, w \rangle$ sesquilinear und somit folgt, dass

$$\langle T_{\gamma} v, w \rangle = \gamma(v, w)$$

für alle $v, w \in V$ gilt.