Prüfungstyp: *

- Die Prüfung dauert 75 Minuten.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studentenkarte) offen auf den Tisch.
- Ausser Wörterbüchern sind keine Hilfsmittel zur Prüfung zugelassen.
- Frühzeitiges Abgeben ist nicht erlaubt.
- Verwenden Sie ausschliesslich einen schwarzen oder blauen Kugelschreiber. Zum Korrigieren verwenden Sie ausschliesslich TippEx.
- Füllen Sie das Antwortblatt in Grossbuchstaben und gut leserlich aus.
- Beantworten Sie alle Fragen auf dem separaten Antwortblatt und geben Sie am Ende der Prüfung nur dieses ab.
- Sie können jede Antwortmöglichkeit zu jeder Frage als *richtig* oder *falsch* deklarieren. Für jede korrekte Auswahl erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte Auswahl 1/2 Punkt Abzug. Wählen Sie keine oder beide Möglichkeiten aus, so erhalten Sie dafür 0 Punkte.
- Tipp: Die Reihenfolge der Fragen ist zufällig gewählt, also insbesondere nicht mit aufsteigender Schwierigkeit. Falls Sie eine Frage als schwierig empfinden, ist es mitunter besser diese vorerst unbeantwortet zu lassen und später zu dieser zurückzukehren.

Bitte wenden!

1. Seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(b) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

(c) Existiert eine Abbildung $h\colon Y \to X$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist f injektiv.

(d) Ist $g \circ f$ injektiv und g bijektiv, so ist f injektiv.

2. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Formeln sind äquivalent zu der Aussage, dass a ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_n$ ist?

(a) $\forall \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geq N\colon |a_n - a| < \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon \in (0,1) \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geq N\colon |a_n - a| < \varepsilon$

(c) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N}\colon |a_n - a| < \varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geq N\colon 0 < |a_n - a| < \varepsilon$

3. Sei X eine nichtleere Menge. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Die Diagonale $\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

(b) Die Relation $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist transitiv und symmetrisch.

(c) Die Mengen X und $X \times X$ sind nicht gleichmächtig.

(d) Die Mengen $\{0,1\}^X$ und $\mathcal{P}(X)$ sind gleichmächtig.

Bitte wenden!

4. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Für jede nichtleere, beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{x,y \in X} |x - y| = \sup X - \inf X.$$

(b) Für jede nichtleere, beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup(X + X) = 2 \sup X.$$

(c) $\sup \emptyset = \infty$

(d) $\inf\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0,\ x^2 \geq 2\} = \sqrt{2}$

5. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Für $z \in \mathbb{C}^\times$ gilt $\mathrm{Re}(1/z) = \mathrm{Re}(z)/|z|^2$.

(b) Für $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $n \in \mathbb{N}$ sind die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n + r\exp(\mathrm{i}\varphi) = 0$ genau die Zahlen

$$z = \sqrt[n]{r}\exp\bigl(\mathrm{i}(\varphi/n + 2k\pi/n)\bigr)$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k < n$.

(c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $|\cos(z)| \leq 1$ und $|\sin(z)| \leq 1$.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

Siehe nächstes Blatt!

6. Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Besitzt $(a_n)_n$ eine beschränkte Teilfolge, so besitzt $(a_n)_n$ auch eine konvergente Teilfolge.

(b) Ist $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so besitzt $(a_n)_n$ eine monotone Teilfolge.

(c) Ist $A \in \mathbb{C}$ kein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_n$, so existiert eine Umgebung von A, die keine Häufungspunkte der Folge $(a_n)_n$ enthält.

(d) Ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge mit $\operatorname{Re}(a_n) \leq 1$ und $\operatorname{Im}(a_n) \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so existiert der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt $\operatorname{Re}(a) \leq 1$ und $\operatorname{Im}(a) \in \mathbb{Q}$.

7. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Wir definieren

$$c_n := \begin{cases} a_{n/2}, & n \text{ gerade}, \\ b_{(n+1)/2}, & n \text{ ungerade}. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} c_n \leq \max\{\limsup_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} b_n\}$

(b) $\liminf_{n\to\infty} c_n = \min\{\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n\}$

(c) Konvergieren sowohl $(a_n)_n$ als auch $(b_n)_n$, so konvergiert auch $(c_n)_n$.

(d) Es gibt nur endlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \limsup_{n\to\infty} c_n$.

Bitte wenden!

8. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) Wir haben die reelle Exponentialfunktion punktweise als Grenzwert einer Folge definiert. Im Beweis der Konvergenz dieser Folge spielte die Existenz von Suprema in $\mathbb{R}$, und damit auch das Vollständigkeitsaxiom, eine wichtige Rolle.

(b) Unser Beweis der Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen basierte auf der gleichmässigen Stetigkeit dieser Funktionen.

(c) Das Prinzip der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen folgt unmittelbar aus unserer Definition der natürlichen Zahlen. Insbesondere mussten wir hierfür das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen nicht benutzen.

(d) In der Vorlesung haben wir die folgende Aussage bewiesen, bekannt als *Abelscher Grenzwertsatz*: Konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$ auch im Punkt $z = R$, so besitzt die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion auf $(-R, R)$ eine stetige Fortsetzung auf $(-R, R]$.

9. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Sind f und g stetig, so ist auch das Produkt $fg\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.

(b) Sind f und g gleichmässig stetig, so ist auch fg gleichmässig stetig.

(c) Ist I kompakt, f stetig und die Funktion g nimmt ihr Maximum an, so nimmt auch die Funktion fg ihr Maximum an.

(d) Ist I kompakt, f beschränkt und g stetig, so ist fg beschränkt.

Siehe nächstes Blatt!

10. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $(t_n)_n$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a, b]$, die gleichmässig gegen eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) f ist beschränkt.

(b) f ist stetig.

(c) f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

(d) f ist Riemann-integrierbar.

11. Sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $|f'(x)| \leq 4$ für alle $x \in [0, 1]$.

(b) f ist Riemann-integrierbar und es gilt $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 1$.

(c) f' ist Riemann-integrierbar und es gilt $\left|\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2$.

(d) Sowohl f als auch $F\colon [0, 1] \ni x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sind Riemann-integrierbar und es gilt $\left|\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}$.

Bitte wenden!

12. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welche der folgenden Formeln für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sind im Allgemeinen korrekt?

(a) $R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(b) $R = \limsup_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

(c) $R = \liminf_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

(d) $R = \sup\left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert für ein } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = r \right\}$

13. Welche der folgenden Reihen sind absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Viel Erfolg!