

Übungsblatt 1

1. a) Stellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Aussage auf:

$$((A \implies B) \wedge \neg A) \implies \neg B.$$

Handelt es sich um eine Tautologie? Wie lautet obige Aussage konkret, wenn $A =$ (es regnet) und $B =$ (die Strasse ist nass)?

- b) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Aussage um eine Tautologie handelt:

$$A \implies (B \vee \neg B).$$

2. Sei X eine Teilmenge von \mathbb{R} . Bilden Sie die Negationen der Aussagen

a) $\exists y \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X: |x - y| < \varepsilon \wedge x \neq y,$

b) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: m < n \implies (\exists x \in X: m < x \wedge x < n)$

und vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich. (Letzteres bedeutet, dass Sie die Negation so weit wie möglich nach „rechts“ schieben sollen).

Bemerkungen:

- Aufgrund der Eigenschaften von \mathbb{R} ist die Negation einer strikten Ungleichung „ $a < b$ “ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch die umgekehrte, nicht-strikte Ungleichung „ $a \geq b$ “.
- „ $\forall \varepsilon > 0$ “ ist eine Kurzschreibweise für „ $\forall \varepsilon \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ “. Daher ändert sich dieses Ungleichheitszeichen bei der Negation nicht. D.h. es gilt $\neg(\forall \varepsilon > 0: A(\varepsilon)) \iff \exists \varepsilon > 0: \neg A(\varepsilon)$ für jede Aussage $A(\varepsilon)$. Analoges gilt für „ $\exists \varepsilon > 0$ “.

3. Wir nennen eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ *Primzahl*, falls p genau zwei Teiler in \mathbb{N} besitzt (nämlich 1 und p). Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass unter den Zahlen

$$n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$$

keine Primzahl ist. Hierbei bezeichnet $n! := n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$ (sprich: „ n Fakultät“) das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Folgern Sie, dass es beliebig grosse Primzahllücken gibt.

Bemerkung: „ $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$ “ ist zu interpretieren als „ $n! + k, 2 \leq k \leq n$ “. Insbesondere gibt es für $n = 1$ keine Zahl in dieser Liste, für $n = 2$ nur die Zahl $n! + 2$, etc.

Bitte wenden!

4. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion:

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5. Auf der Insel der Ritter und Knappen ist jeder Einwohner entweder ein Ritter oder ein Knappe (und jeder kennt den Status von allen anderen Einwohnern). Dabei gilt, dass

- Ritter immer die Wahrheit sagen;
- Knappen immer lügen.

Sie werden nun auf Einwohner der Insel treffen. Ihre Aufgabe ist zu versuchen zu entscheiden, ob sie Ritter oder Knappen sind.

- a) Sie treffen Johannes und Wilhelm auf der Insel. Johannes sagt: „Wilhelm und ich sind Ritter.“ Wilhelm erwidert: „Das ist eine Lüge, Johannes ist ein Knappe!“ Was sind sie?
- b) Sie treffen Friedrich und seinen Bruder auf der Insel. Friedrich sagt: „Genau einer von uns ist ein Ritter.“ Was können Sie daraus schliessen?

6. **Behauptung:** Alle Enten haben dieselbe Farbe.

Beweis durch Induktion¹: Sei $P(n)$ die Aussage, dass in jeder Familie von n Enten alle dieselbe Farbe aufweisen. $P(1)$ ist offensichtlich wahr. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr ist und wollen $P(k+1)$ beweisen. Wir betrachten also $k+1$ Enten in einem Teich. Locken wir eine davon mit Brotkrümeln heraus, so bleiben k Enten zurück, die nach Induktionsannahme alle die gleiche Farbe haben; ohne Einschränkung nennen wir diese Farbe „gelb“. Sattgefressen kehrt die $(k+1)$ -te Ente wieder in den Teich zurück. Es schwimmen nun k gelbe und eine Ente unbekannter Farbe im Teich. Jetzt locken wir eine der gelben Enten zu uns. Dann bleiben wieder k Enten übrig, die nach Induktionsannahme wiederum dieselbe Farbe haben. Diese Farbe muss gelb sein, und damit ist auch die $(k+1)$ -te Ente gelb. Dies beweist $P(k+1)$ und die Behauptung folgt per Induktion.

Wo versteckt sich der Fehler?

Challenge. In Aufgabe 3. haben wir gesehen, dass für $n \in \mathbb{N}$ keine der Zahlen

$$n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$$

eine Primzahl ist. Sei nun $p \geq 5$ eine Primzahl und $n := p - 1$. Zeigen Sie, dass dann auch $n! + 1$ keine Primzahl ist.

¹induktion

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

Die Beantwortung erfolgt online unter <https://echo.ethz.ch/s/>. Sie erhalten dort direktes Feedback zu Ihren Antworten. (Das Onlinesystem wird derzeit noch eingerichtet. Es wird aber spätestens zu Beginn der zweiten Semesterwoche verfügbar sein.)

1. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

- (a) $A \vee \neg A$
- (b) $((A \implies B) \wedge B) \implies A$
- (c) $((A \vee B) \wedge A) \implies \neg B$
- (d) $(A \wedge \neg A) \implies B$

2. Das *ausschliessende Oder* XOR ist definiert durch die Festsetzung, dass $A \text{ XOR } B$ genau dann wahr sein soll, wenn genau eine der Aussagen A und B wahr ist. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu $A \text{ XOR } B$?

- (a) $(A \implies \neg B) \vee (\neg B \implies A)$
- (b) $A \iff \neg B$
- (c) $(\neg A \implies B) \wedge (B \implies \neg A)$
- (d) $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
- (e) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

3. Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist die Aussage

$$\forall x \in X: x^2 \leq 0$$

notwendigerweise falsch.

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

Bitte wenden!

In allen folgenden Fragen befinden Sie sich wie in Aufgabe 5. auf der Insel der Ritter und Knappen. Folgende Ereignisse tragen sich dort zu.

4. Sie treffen auf einen entnervt aussehenden Einwohner. Besorgt fragen Sie ihn: „Geht es Ihnen gut?“ Darauf erhalten Sie die verärgerte Antwort: „Das werde ich doch Ihnen nicht verraten!“ Anschliessend macht er sich davon und wurde nicht mehr gesehen. Was schliessen Sie daraus über diesen Einwohner?

- (a) Er ist ein Ritter.
- (b) Er ist ein Knappe.
- (c) Nichts.

5. Sie treffen Frank auf der Insel. Stolz berichtet er: „Mein Vater hat einmal gesagt, dass er und ich unterschiedliche Typen haben; dass einer von uns ein Ritter, der andere ein Knappe ist.“ Kann sein Vater dies tatsächlich behauptet haben?

- (a) Ja.
- (b) Nein.

6. Sie treffen auf einen Einwohner mit langem Bart. Er verkündet: „Ich habe diese Aussage im letzten Jahr schon einmal gemacht.“ Was schliessen Sie über diesen Einwohner?

- (a) Er ist ein Ritter.
- (b) Er ist ein Knappe.
- (c) Nichts.

Siehe nächstes Blatt!

7. Nach Ihrer Abreise von der Insel treffen Sie einen Soziologen, der die Einwohner der Insel studiert hat (und selbst kein Einwohner der Insel ist). Er berichtet von seiner kuriosen Feststellung, dass es für jeden Einwohner Y der Insel einen Einwohner X gibt, der behauptet, dass sowohl X als auch Y Knappen sind. Wie viele Einwohner hat die Insel?

- (a) Weniger als 10.
- (b) Mindestens 10, weniger als 100.
- (c) Mindestens 100.
- (d) Das kann man nicht entscheiden.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 27. September 2017, 11:00, unter <http://tiny.cc/vorxn/>.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 27. September 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 29. September 2017, 8:00, unter <https://echo.ethz.ch/s/>.