D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis I — HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 2

1. Finden Sie je ein Beispiel für eine Relation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die von den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation

a) nur die Symmetrie;

b) nur die Transitivität;

c) die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie

erfüllt.

2. Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist, falls $g \circ f$ surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist, falls $g \circ f$ injektiv ist.

c) Folgern Sie, dass f bijektiv ist, falls f eine Umkehrabbildung besitzt. (Genauer: Falls eine Abbildung $h\colon Y \to X$ existiert mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ h = \mathrm{id}_Y$, dann ist f bijektiv und es gilt $h = f^{-1}$.)

3. Sei X eine nichtleere Menge. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X,\ A \mapsto \mathbb{1}_A,$$

die einer Teilmenge $A \subset X$ deren charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ zuordnet. Zeigen Sie auf die folgenden beiden Arten, dass Φ bijektiv ist:

a) indem Sie direkt verifizieren, dass Φ injektiv und surjektiv ist;

b) unter Verwendung von Aufgabe 2.c), indem Sie explizit eine Umkehrabbildung angeben.

Folgern Sie, dass für jede Menge X die Mengen $\mathcal{P}(X)$ und $\{0,1\}^X$ gleichmächtig sind.

Erinnerung: Mit Y^X bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $X \to Y$. Hier ist also speziell $\{0,1\}^X$ die Menge aller Abbildungen $X \to \{0,1\}$.

Bitte wenden!

4. Seien $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\dot\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Y, sowie $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so dass $x \sim x'$ stets $f(x)\dot\sim f(x')$ impliziert.

a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tilde f\colon X/\!\sim\, \to Y/\dot\sim$ gibt, die $\tilde f([x]_\sim) = [f(x)]_{\dot\sim}$ für alle $x \in X$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass $\tilde f$ surjektiv ist, falls f surjektiv ist.

c) Ist f notwendigerweise surjektiv, falls $\tilde f$ surjektiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $X_n = \{1, \ldots, n\}^2$ die Menge der Felder eines $n \times n$-Schachbretts. Hierauf definieren wir eine Relation $\sim$, wobei $a \sim b$ genau dann gelten soll, wenn ein Springer von Feld a des sonst leeren Bretts X_n das Feld b in endlich vielen Zügen erreichen kann.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X_n ist.

b) Beschreiben Sie die Menge $X_n/\!\sim$ in Abhängigkeit von n.

6. **a)** Sei X eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass es eine Injektion $\mathbb{N} \to X$ gibt.

b) Folgern Sie aus Teil a), dass jede Menge X entweder endlich, abzählbar unendlich, oder überabzählbar ist.

c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele überabzählbare Kardinalitäten gibt.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Seien X, Y Mengen und $A, A' \subset X$ sowie $B, B' \subset Y$ Teilmengen. Sei weiters $*$ eine Mengenoperation. In welchen Fällen gilt

$$(A * A') \times (B * B') = (A \times B) * (A' \times B')?$$

(a) $* = \cap$

(b) $* = \cup$

(c) $* = \setminus$

(d) $* = \triangle$, wobei die *symmetrische Differenz* $C \triangle D$ zweier Mengen $C, D \subset Z$ per Definition aus genau den Elementen von Z besteht, die in genau einer der Mengen C, D enthalten sind.

2. Seien X, Y Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $B \subset Y$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr?

(a) $A \subset f^{-1}(f(A))$

(b) $A \supset f^{-1}(f(A))$

(c) $B \subset f(f^{-1}(B))$

(d) $B \supset f(f^{-1}(B))$

3. Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Welche der folgenden Schlüsse gelten allgemein?

(a) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist f surjektiv.

(b) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.

(c) Wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt, dann ist f injektiv.

(d) Wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt, dann ist f surjektiv.

Bitte wenden!

4. In dieser Aufgabe behaupten wir fälschlicherweise, dass jede symmetrische und transitive Relation $\sim$ auf einer Menge X auch reflexiv (und damit eine Äquivalenzrelation) ist. Welche Zeilen des folgenden Beweises sind fehlerhaft?

(a) Sei $x \in X$ ein beliebiges Element. Sei $y \in X$, so dass $x \sim y$.

(b) Wegen Symmetrie der Relation gilt also auch $y \sim x$.

(c) Aus der Transitivität von $\sim$ folgt die Implikation $(x \sim y) \wedge (y \sim x) \implies x \sim x$.

(d) Zusammen mit dem zuvor Festgestellten folgt daraus $x \sim x$, was zu zeigen war.

5. Seien A, B endliche Teilmengen einer Menge X. Welche der folgenden Formeln sind richtig?

(a) $|A \cup B| = |A| + |B|$

(b) $|A \cap B| = \min\{|A|, |B|\}$

(c) $|A \times B| = |A||B|$

(d) $|B^A| = |B|^{|A|}$, falls $A, B \neq \emptyset$

Siehe nächstes Blatt!

6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das Schubfachprinzip besagt, dass eine Abbildung von einer Menge mit mehr als n Elementen nach $\{1, \ldots, n\}$ nicht injektiv sein kann. Was folgt daraus?

(a) Werden 91 Briefe auf 13 Postfächer verteilt, so enthält zumindest ein Postfach 8 Briefe.

(b) Werden $(n+1)!$ Briefe auf 2^n Postfächer verteilt, so enthält zumindest ein Postfach n Briefe.

(c) Eine Abbildung $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ kann nicht surjektiv sein.

(d) Sind $x_1, \ldots, x_{n+1}$ paarweise verschiedene Punkte im Intervall $[0, 1]$, so gibt es $1 \leq j < k \leq n+1$ mit $|x_j - x_k| \leq 1/n$.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 4. Oktober 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 4. Oktober 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.

- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 6. Oktober 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.