Übungsblatt 4

1. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie, dass $-X := \{-x \mid x \in X\}$ nach oben beschränkt ist und dass $\sup(-X) = -\inf X$.

2. Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

genau die beiden Zahlen

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

sind. (Dabei ist nach Konvention $\sqrt{a} := \mathrm{i}\sqrt{-a}$ für $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$.)

Bemerkung: Die Aussage dieser Aufgabe stimmt auch für $p, q \in \mathbb{C}$, sobald man Wurzeln aus beliebigen komplexen Zahlen zur Verfügung hat.

3. Sei X eine nichtleere Menge und $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit nach oben beschränkten Bildern. Zeigen Sie, dass

$$\sup\{f(x) + g(x) \mid x \in X\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}.$$

Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass keine Gleichheit gelten muss.

4. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ über die injektive Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit der „x-Achse“ in der Gaußschen Zahlenebene identifizieren kann. Mittels dieser Identifikation können wir beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ auch als Teilmengen von $\mathbb{C}$ auffassen.

a) Zeigen Sie, dass jede in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ (vgl. Definition 2.48 im Skript) auch als Teilmenge von $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist (vgl. Definition 2.54).

b) Welche offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind auch als Teilmengen von $\mathbb{C}$ offen?

Bitte wenden!

5. Wir erweitern die Gaußsche Zahlenebene um den Punkt ∞ „im Unendlichen“ und setzen $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Definiere

$$\sigma\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ z \mapsto \begin{cases} z^{-1}, & \text{falls } z \in \mathbb{C}^{\times}, \\ \infty, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

a) Erklären Sie das Abbildungsverhalten von σ geometrisch.

b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $G_{x_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = x_0\} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Bestimmen Sie die Bildmenge $\sigma(G_{x_0})$.

c) Sei nun $r > 0$ und $K_r(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z - 1)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = r^2\} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Bestimmen Sie $\sigma(K_r(1))$.

6. Sei K ein angeordneter Körper. Eine Funktion $f\colon K \to K$ heisst *monoton wachsend*, wenn für $x, y \in K$ aus $x \leq y$ stets $f(x) \leq f(y)$ folgt. Seien nun $a, b \in K$ mit $a < b$ und $f\colon K \to K$ eine monoton wachsende Funktion mit $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Entscheiden Sie in den Fällen

a) $K = \mathbb{R}$,

b) $K = \mathbb{Q}$,

ob die Funktion f notwendigerweise einen Fixpunkt besitzt, also ob ein $\xi \in K$ existieren muss mit $f(\xi) = \xi$. Geben Sie jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Welcher Ausdruck entspricht stets $\sqrt{x^2}$?

(a) x

(b) $\pm x$

(c) $|x|$

(d) Keiner der obigen Ausdrücke.

2. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2}$.

(b) $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2$.

(c) $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

(d) Aus $z^4 = w^4$ folgt $z = \pm w$.

(e) Keine der obigen Aussagen.

3. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ offene Teilmengen. Dann ist der Durchschnitt $A \cap B$...

(a) ...offen und nicht abgeschlossen.

(b) ...offen und abgeschlossen.

(c) ...offen.

(d) ...nicht notwendigerweise offen.

Bitte wenden!

4. Eine Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen ist, die Lösbarkeit der Gleichung $z^2 = -1$ zu erreichen. Wie viele Lösungen besitzt diese Gleichung nun in $\mathbb{C}$?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) Man braucht mehr Informationen um das zu entscheiden.

5. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Gilt $A \subset B$, so folgt $\sup A \leq \sup B$.

(b) Gilt $\sup A \leq \sup B$, so gibt es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $a \leq b$.

(c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

(d) $\sup(AB) = \sup A \sup B$, wobei $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

(e) Existiert das Maximum der Menge A, so gilt $\max A = \sup A$.

(f) Ist $\sup A \in A$, so existiert das Maximum von A.

Siehe nächstes Blatt!

6. Betrachten Sie die Menge

$$X = \left\{ \max\left(\frac{(-1)^n}{1+n}, \frac{1}{2^n} \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) $\sup X = 1$

(b) $\max X = 1$

(c) $\sup X = \frac{1}{2}$

(d) $\max X = \frac{1}{2}$

(e) $\inf X = 0$

(f) $\min X = 0$

(g) $\inf X = -\frac{1}{2}$

(h) $\min X = -\frac{1}{2}$

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 18. Oktober 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 18. Oktober 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 20. Oktober 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.