Übungsblatt 5

1. Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ stets

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. Wir wollen nun analoge Ungleichungen für andere Werte von n finden. Entscheiden Sie in den folgenden Fällen jeweils, welches Ungleichheitszeichen man in

$$(1+x)^n \square 1 + nx$$

für $\square$ einsetzen muss, damit die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt:

a) $n = 1/2$,

b) $n = -1$.

Sie müssen Ihre Antworten nicht beweisen.

Bemerkung: Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ ist $a^{1/2}$ eine andere Notation für $\sqrt{a}$.

2. Sei K ein Körper. Beweisen Sie für $x \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Potenzrechenregel

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

mittels vollständiger Induktion. Sie dürfen dabei die Formeln $(xy)^n = x^n y^n$ und $x^{m+n} = x^m x^n$ ($x, y \in K$, $m, n \in \mathbb{N}_0$) ohne Beweis verwenden.

3. Sei K ein Körper.

a) Sei $f \in K[T]$. Zeigen Sie, dass $x \in K$ genau dann eine Nullstelle von f ist, wenn das Polynom $T - x \in K[T]$ ein Teiler von f ist.

b) Folgern Sie, dass ein Polynom $f \in K[T] \setminus \{0\}$ vom Grad $\deg f = n$ höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann.

c) Seien nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $f, g \in K[T]$ Polynome mit Grad höchstens n, die in mehr als n Punkten übereinstimmen (d.h. $|\{x \in K \mid f(x) = g(x)\}| > n$). Zeigen Sie, dass $f = g$ gilt.

Bitte wenden!

4. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Wir nennen eine Teilmenge $D \subset X$ *dicht in* X, falls für jede offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}$ mit $O \cap X \neq \emptyset$ auch $O \cap D \neq \emptyset$ gilt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Teilmenge $D \subset X$ ist dicht in X.

(ii) Jeder Punkt von $X \setminus D$ ist ein Häufungspunkt von D.

(iii) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, die D enthält, enthält auch X.

5. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a) Beweisen Sie die folgende kombinatorische Interpretation von Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge), oder äquivalenterweise die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen.

Diese Interpretation erlaubt kombinatorische Beweise von algebraischen Identitäten für Binomialkoeffizienten.

Beispiel: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Kombinatorischer Beweis: Angenommen wir haben n blaue Kugeln und 1 rote Kugel. Dann ist $\binom{n+1}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, k beliebige unserer $n+1$ Kugeln auszuwählen. In jeder möglichen Auswahl kommt die rote Kugel entweder vor oder nicht. Die Anzahl der Fälle, in denen die rote Kugel vorkommt, ist genau $\binom{n}{k-1}$ (denn man muss dann noch $k-1$ aus den n blauen Kugeln auswählen), und die Anzahl der Fälle, in denen sie nicht vorkommt, ist genau $\binom{n}{k}$ (denn man muss dann alle k Kugeln aus den n blauen wählen). Also gilt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

b) Seien nun $k, m, n \in \mathbb{N}_0$. Finden Sie kombinatorische Beweise der Identitäten

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}, \quad \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}\binom{n}{j} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

6. Analog zur Definition in $\mathbb{R}$ nennen wir einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ einen *Häufungspunkt* von $A \subset \mathbb{C}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ gibt mit $0 < |a - z_0| < \varepsilon$. Zeigen Sie, dass jede unendliche, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ einen Häufungspunkt besitzt.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur Aussage, dass x_0 ein Häufungspunkt von A ist?

(a) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists! a \in A\colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A\colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

(c) $\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \, \exists a \in A\colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 1 \, \exists a \in A\colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

2. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Wie viele Summanden kommen in der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ vor?

(a) $n - m - 1$

(b) $n - m$

(c) $n - m + 1$

3. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Welche der folgenden Ausdrücke stimmen stets mit der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ überein?

(a) $\sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

(b) $\sum_{j=1}^{n-m} a_{n+1-j}$

(c) $\sum_{k=0}^{n-m} a_{m+k}$

(d) $\sum_{l=0}^{n-m} a_{n-l}$

Bitte wenden!

4. In der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

für n komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt Gleichheit genau dann wenn die Summanden $a_1, \ldots, a_n \ldots$

(a) …alle dasselbe Vorzeichen haben.

(b) …über $\mathbb{R}$ linear abhängig sind.

(c) …auf einer Geraden $\mathbb{R}z := \{rz \mid r \in \mathbb{R}\}$ mit $z \in \mathbb{C}^\times$ liegen.

(d) …auf einem Strahl $\mathbb{R}_{\geq 0}z := \{rz \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ mit $z \in \mathbb{C}^\times$ liegen.

5. Welche der folgenden Zahlen sind algebraisch? (Vgl. Abschnitt 3.2.3 im Skript.)

(a) $z_1 = 1 + \sqrt{2}$

(b) $z_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

(c) $z_3 = \mathrm{i} + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

6. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Welche der folgenden Formeln gelten stets?

(a) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

(b) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

(c) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$

(d) $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 2^{n-1}$

Siehe nächstes Blatt!

7. Sei $X = \{(-1)^n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Was ist die Menge der Häufungspunkte von X?

(a) $\{1\}$

(b) $\{-1\}$

(c) $\{(-1)^n\}$

(d) $\{\pm 1\}$

(e) X

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 25. Oktober 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 25. Oktober 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 27. Oktober 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.