Übungsblatt 6

1. Finden Sie je ein Beispiel für

a) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall;

b) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall;

c) eine unbeschränkte Funktion auf einem kompakten Intervall, die in höchstens einem Punkt unstetig ist.

Sie müssen keine Beweise angeben.

2. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Drücken Sie die Aussagen „f ist nicht stetig in $x_0 \in D$“ und „f ist nicht stetig“ in Prädikatenlogik aus. Zeigen Sie damit, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases}$$

nicht stetig ist.

3. Sei $D \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz-stetig*, wenn es eine *Lipschitz-Konstante* $L \geq 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

für alle $x, y \in D$.

a) Zeigen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit gleichmässige Stetigkeit impliziert.

b) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmässig stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist.

4. Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass f eine reelle Nullstelle besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst unter Verwendung ähnlicher Argumente wie im Beweis von Proposition 3.15 im Skript, dass es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

Bitte wenden!

5. Sei $d \in \mathbb{N}$. Das Ziel dieser Übung ist die Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes auf mehr als zwei Summanden. Dazu führen wir sogenannte *Multiindizes* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$ und die folgenden Notationen ein:

- Die *Länge* $|\boldsymbol{\alpha}|_1$ eines Multiindex $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ ist

$$|\boldsymbol{\alpha}|_1 := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

- Ist $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ ein Multiindex und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq |\boldsymbol{\alpha}|_1$, so setzen wir

$$\binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{n!}{(\alpha_1)! \cdots (\alpha_d)!(n - |\boldsymbol{\alpha}|_1)!}.$$

- Ist $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ ein Multiindex und $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, so setzen wir

$$\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}} := z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d}.$$

a) Beweisen Sie für $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$ und $n \in \mathbb{N}_0$ den Multinomialsatz

$$(z_1 + \cdots + z_d)^n = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d \colon |\boldsymbol{\alpha}|_1 = n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

b) Welchen Ausdruck beschreibt die Summe

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d \colon |\boldsymbol{\alpha}|_1 \leq n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}?$$

6. Sei I ein nichtleeres Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen kann.

Challenge. Für eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $C(f)$ die Menge der Stetigkeitsstellen von f.

a) Finden Sie eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $C(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $C(f) = \mathbb{Q}$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0. Gilt die folgende Aussage im Allgemeinen?

$$f(0) \neq 0 \implies (\exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x| < \delta \implies f(x) \neq 0)$$

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt die folgende Aussage im Allgemeinen?

$$(\exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x| < \delta \implies f(x) \neq 0) \implies f(0) \neq 0$$

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

(a) $V_1 = \{f \in V \mid f \text{ monoton wachsend}\}$

(b) $V_2 = \{f \in V \mid f \text{ monoton fallend}\}$

(c) $V_3 = \{f \in V \mid f \text{ monoton}\}$

(d) Keine dieser Mengen.

4. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $D' \subset D$ eine nichtleere Teilmenge von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist f stetig, so ist die Einschränkung $f|_{D'}$ stetig.

(b) Ist $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.

(c) Ist D' offen in $\mathbb{R}$ und $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.

Bitte wenden!

5. Definiere $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ und

$$H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

(a) $H \circ H$

(b) $H \cdot H$

(c) $F \circ H$

(d) $H \circ F$

(e) $F \circ F$

(f) Keine der obigen Funktionen.

6. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $f_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2\colon [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. In welchen der folgenden Fälle ist die zusammengesetzte Funktion

$$f\colon [a, c] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b], \\ f_2(x), & x \in (b, c], \end{cases}$$

notwendigerweise stetig?

(a) $f(b) = f_1(b)$

(b) $f(b) = f_2(b)$

(c) $f_1(b) = f_2(b)$

(d) In keinem dieser Fälle.

7. Sei $D = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ und

$$f\colon D \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ist f stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 1. November 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 1. November 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 3. November 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.