Übungsblatt 7

In allen Aufgaben bezeichnen $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$.

1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$$

in Abhängigkeit von a und b. Hierbei bezeichnet sgn die *Signum-* oder *Vorzeichenfunktion*

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

2. Sei $t \in \mathcal{TF}([a, b])$ eine Treppenfunktion. Zeigen Sie, dass t Riemann-integrierbar ist und dass das Riemann-Integral von t mit dem Integral von t als Treppenfunktion übereinstimmt.

3. Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass das *partikuläre Integral*

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine stetige Funktion auf $[a, b]$ definiert. Ist F auch gleichmässig, oder sogar Lipschitz-stetig?

4. Sei $f \in C([a, b])$ stetig und $f \geq 0$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff f = 0.$$

Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass die Implikation „$\Longrightarrow$" nicht notwendigerweise gilt, wenn f lediglich Riemann-integrierbar (und nichtnegativ) ist.

Bitte wenden!

5. Seien $f \in C([a,b])$ stetig und $g \in \mathcal{R}([a,b])$ eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion.

a) Zeigen Sie, dass das Produkt fg Riemann-integrierbar ist.

b) Beweisen Sie den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*: Es gibt ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) Bleibt die Aussage in b) gültig, wenn man die Voraussetzung „g nichtnegativ" fallen lässt?

6. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Funktionen Riemann-integrierbar sind.

a) Die *modifizierte Dirichlet-Funktion*

$$f_1\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}_0 \text{ teilerfremd,} \\ 0, & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

b) Die *Gauß-Abbildung*

$$f_2\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

wobei $\lfloor \alpha \rfloor$ den *ganzzahligen Anteil* einer reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichnet (vgl. Abschnitt 2.6.1 im Skript).

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n} \,\mathrm{d}x?$$

(a) $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big)$

(b) $n^{-1} \big(\sqrt{n} - 1\big)$

(c) $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n-1} k\big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big)$

(d) $n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} k\big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big)$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Positiv- und Negativteil f^+ und f^- von f seien definiert wie in Abschnitt 4.3.2 des Skripts. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist f Riemann-integrierbar, so sind f^+, f^- und $|f|$ Riemann-integrierbar.

(b) Ist $|f|$ Riemann-integrierbar, so sind f^+, f^- und f Riemann-integrierbar.

(c) Sind zumindest zwei der Funktionen $f, |f|, f^+, f^-$ Riemann-integrierbar, so sind alle dieser Funktionen Riemann-integrierbar.

3. Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ und sowohl $f\colon [a,b] \to [c,d]$ als auch $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch die Komposition $g \circ f$ Riemann-integrierbar.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ändert man den Wert von f in genau einem Punkt, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^* \,\mathrm{d}x$.

(b) Ändert man den Wert von f in endlich vielen Punkten, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^* \,\mathrm{d}x$.

(c) Ändert man den Wert von f in abzählbar vielen Punkten, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^* \,\mathrm{d}x$.

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $\int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t) \,\mathrm{d}t$ für alle $x \in [a, b]$. Folgt hieraus $f \leq g$?

(a) Ja.

(b) Ja, falls f und g stetig sind.

(c) Ja, falls f und g stetig sind und $f(a) = g(a)$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Siehe nächstes Blatt!

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $U(f)$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist $U(f)$ endlich, so ist f Riemann-integrierbar.

(b) Besitzt die Menge $U(f)$ höchstens einen Häufungspunkt, so ist f Riemann-integrierbar.

(c) Ist $U(f)$ überabzählbar, so ist f nicht Riemann-integrierbar.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 8. November 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 8. November 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 10. November 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.