D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis I — HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 8

1. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die Folgen $(a_n)_n$ gegeben durch

a) $a_n = \dfrac{(2-1/\sqrt{n})^{10} - (1+1/n^2)^{10}}{1-1/n^2-1/\sqrt{n}}$,

b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

c) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

2. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge in D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $(f(a_n))_n$ eine Cauchy-Folge ist. Belegen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass dies für lediglich stetiges f nicht notwendigerweise gilt.

3. Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C_\alpha > 0$, so dass

$$\log(x) \leq C_\alpha x^\alpha$$

für alle $x > 0$.

Für die Definition der Potenz x^α siehe Abschnitt 5.3.8 im Skript.

4. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_n$ der *Cesàro-Mittel* gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergent ist und denselben Grenzwert wie $(a_n)_n$ besitzt. Folgt aus der Konvergenz der Cesàro-Mittel auch die Konvergenz der ursprünglichen Folge?

Bitte wenden!

5. **a)** Die Folge $(x_n)_n$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $(x_{2n})_n$.

b) Die Folge $(f_n)_n$ der *Fibonacci-Zahlen* ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 0, \quad f_2 := 1, \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = g$ gilt, wobei g den Grenzwert aus Teilaufgabe a) bezeichnet.

6. **a)** Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Setze $I := \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $S := \limsup_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_n$ genau das Intervall $[I, S]$ ist.

b) Konstruieren Sie ein Beispiel einer Folge $(a_n)_n$ wie in a) mit $I = 0$ und $S = 1$.

Challenge. Die *obere Dichte* $\overline{\mathbf{d}}(A)$ einer Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ ist definiert als

$$\overline{\mathbf{d}}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A \cap [1, n]| \in [0, 1].$$

Existiert sogar der Grenzwert

$$\mathbf{d}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A \cap [1, n]|,$$

so sagen wir, dass A *Dichte* $\mathbf{d}(A)$ *besitzt.*

a) Die Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitze positive Dichte. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Menge $A \cap (A - m)$ positive obere Dichte hat.

b) Gilt der Schluss aus Teil a) auch, wenn man lediglich voraussetzt, dass A positive obere Dichte hat?

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Was ist der Wert von

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}+\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}?$$

(a) 0

(b) $1/\mathrm{e}$

(c) $2/\mathrm{e}$

(d) Einer dieser Grenzwerte existiert nicht.

2. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}^\times$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{\infty, -\infty\}$ folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n \in \{\infty, -\infty\}$.

(c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = \infty$.

3. Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 1$

Bitte wenden!

4. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente reelle Folgen mit Grenzwerten a respektive b. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq b$.

(b) Gilt $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq b$.

(c) Gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a < b$.

5. Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge mit der Eigenschaft, dass alle konvergenten Teilfolgen $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ denselben Grenzwert besitzen. Dann ist $(a_n)_n$ konvergent.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

6. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte reelle Folgen. Welche der folgenden Aussagen über den Limes Superior sind im Allgemeinen korrekt?

(a) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$

(b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$

(c) Ist $(b_n)_n$ konvergent, so gilt $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

(d) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq 0$ für $n \geq N$ und gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(e) Gibt es eine Folge $(n_k)_k$ von Indizes mit $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Welche der folgenden Aussagen über den Logarithmus sind korrekt?

(a) $\log$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}_{>0}$.

(b) $\log$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$.

(c) $\log$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_{>0}$.

(d) $\log(x+y) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$.

(e) $\log(x+y) = \log(x)\log(y)$ für alle $x, y > 0$.

(f) Da $\log$ die Umkehrabbildung von $\exp$ ist und $\exp$ streng monoton wachsend ist, ist $\log$ streng monoton fallend.

(g) Da $\log$ die Umkehrabbildung von $\exp$ ist und $\exp$ streng monoton wachsend ist, ist $\log$ streng monoton wachsend.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 15. November 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 15. November 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.

- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 17. November 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.