Übungsblatt 9

1. Beschreiben Sie die Beweisidee für die Konvergenz reeller Cauchy-Folgen in einem Satz. Welcher Beweisschritt funktioniert nicht, wenn wir uns auf den Standpunkt stellen, ausschliesslich die rationalen Zahlen zu kennen?

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren).

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x-2}$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}{2\mathrm{e}^{2x} - 1}$,

c) $\lim\limits_{x\searrow 0} (x-1)\log(x)$.

3. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D und $f_i, g_i \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit

$$f_1(x) = O(g_1(x)),\ f_2(x) = o(g_2(x)) \quad (x \to x_0).$$

Beweisen Sie

$$f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) g_2(x)\big) \quad (x \to x_0).$$

Bemerkung: $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ist definitionsgemäss genau dann ein Häufungspunkt von D, wenn $\dot{U}_\delta(x_0) \cap D \neq \emptyset$ für jedes $\delta > 0$ gilt, wobei $\dot{U}_\delta(x_0)$ die punktierte δ-Umgebung von x_0 ist. Da wir diese Umgebungen auch für $x_0 = \pm\infty$ definiert haben (nämlich als $\dot{U}_\delta(\infty) = \big(\frac{1}{\delta}, \infty\big)$ und $\dot{U}_\delta(-\infty) = \big(-\infty, -\frac{1}{\delta}\big)$), erklärt dies auch, wann ∞ oder $-\infty$ ein Häufungspunkt von D ist. Ausformuliert erhalten wir: ∞ ist genau dann ein Häufungspunkt von D, wenn D nicht nach oben beschränkt ist, und $-\infty$ ist ein Häufungspunkt von D, wenn D nicht nach unten beschränkt ist.

Bitte wenden!

4. Zeigen Sie, dass die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=nq}^{np-1} \frac{1}{k} \qquad (p, q \in \mathbb{N},\ q < p)$,

existieren und geben Sie Formeln für sie an (auch wenn wir diese Formeln zur Zeit noch nicht berechnen können).

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x$$

für (reellwertige) Riemann-integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

a) Ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathcal{R}([a, b])$?

b) Zeigen Sie, dass $C([a, b])$ mit $\|\cdot\|_1$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Sie dürfen dafür Aussagen früherer Übungsaufgaben verwenden.

c) Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass es in $C([a, b])$ Cauchy-Folgen bzgl. $\|\cdot\|_1$ gibt, welche in $C([a, b])$ keinen Grenzwert bzgl. $\|\cdot\|_1$ besitzen.

Bemerkung: Teil c) besagt kürzer ausgedrückt, dass $C([a, b])$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ nicht vollständig ist. Später im Studium werden Sie den Vektorraum $L^1([a, b])$ kennenlernen, welcher $C([a, b])$ umfasst und mit der Norm $\|\cdot\|_1$ vollständig ist.

6. Sei D eine nichtleere Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathcal{F}$ ein Filter auf D.

a) Definieren Sie den Limes Superior $\limsup_{\mathcal{F}} f$ und Limes Inferior $\liminf_{\mathcal{F}} f$ entlang $\mathcal{F}$.

b) Zeigen Sie, dass f genau dann entlang $\mathcal{F}$ gegen $A \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert, wenn

$$A = \liminf_{\mathcal{F}} f = \limsup_{\mathcal{F}} f.$$

Folgern Sie, dass der Grenzwert von f entlang $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt ist, falls er existiert.

c) Sei $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ ein Filter auf D, entlang welchem f konvergiert. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_{\mathcal{F}} f \leq \lim_{\mathcal{F}'} f \leq \limsup_{\mathcal{F}} f.$$

Hinweis: Überlegen Sie in a), welcher Ausdruck in den Definitionen 5.37 und 5.38 sich am besten zur Verallgemeinerung eignet.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Die Funktion

$$\mathbb{R} \ni a \mapsto \lim_{x\to\infty} x^a \exp(-x)$$

ist…

(a) …nicht wohldefiniert.

(b) …streng monoton wachsend.

(c) …konstant.

(d) …streng monoton fallend.

2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann können wir die Existenz von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (Grenzwert der Funktion f für $x \to \infty$) und $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (Grenzwert der Folge $(f(n))_n$) untersuchen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$, so existiert auch $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

(b) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

(c) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f stetig, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

(d) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f monoton, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

Bitte wenden!

3. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen der folgenden Fälle folgt die Stetigkeit von f in x_0?

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert

(b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(c) x_0 ist links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D und f ist in x_0 links- und rechtsseitig stetig

(d) x_0 ist kein rechtsseitiger Häufungspunkt von D und es gilt $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ist das Folgende ein korrekter Beweis der Aussage, dass jede Funktion $f \in C([a,b])$ beschränkt ist?

Angenommen f wäre nicht beschränkt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$. Wähle eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ mit Grenzwert $x_0 \in [a,b]$. Es folgt $|f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \geq \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, ein Widerspruch.

(a) Ja.

(b) Nein.

5. Welche der folgenden Mengen sind Filter auf $\mathbb{R}$?

(a) $\mathcal{F}_1 = \{F \subset \mathbb{R} \mid F \text{ oder } \mathbb{R} \setminus F \text{ abzählbar}\}$

(b) $\mathcal{F}_2 = \{F \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus F \text{ abzählbar}\}$

(c) $\mathcal{F}_3 = \{F \subset \mathbb{R} \mid 0 \in F \vee 1 \in F\}$

(d) $\mathcal{F}_4 = \{\{n, n+1, n+2, \dots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(e) $\mathcal{F}_5 = \{F \subset \mathbb{R} \mid F \text{ ist Umgebung jeder rationalen Zahl}\}$

Siehe nächstes Blatt!

6. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Welche Aussagen über den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$$

sind im Allgemeinen korrekt?

(a) Ist $a > 0$, so existiert der Grenzwert und er ist a^b.

(b) Ist $a = 0$ und $b > 0$, so existiert der Grenzwert und er ist 0.

(c) Ist $a = b = 0$, so existiert der Grenzwert und er ist $0^0 = 1$.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 22. November 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 22. November 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 24. November 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.