Übungsblatt 10

1. Diskutieren Sie, welche der in der Vorlesung behandelten Konvergenzkriterien (Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Leibniz-Kriterium, Majorantenkriterium, Verdichtungskriterium) für den Beweis der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+(-1)^n}{n^2+1}$$

verwendet werden können.

2. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der bedingt konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

mit sich selbst divergiert.

Bemerkung: Das *Cauchy-Produkt* zweier Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ mit Summanden $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

3. Entscheiden Sie für die Funktionenfolgen $f_n, g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx}, \quad g_n(x) := \frac{x}{1+nx}, \qquad (n \in \mathbb{N},\, x \in [0,1])$$

ob diese punktweise bzw. gleichmässig konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

4. Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen korrekt? Geben Sie jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) $\exists s > 1\colon a_n = O(n^{-s}) \quad (n \to \infty)$

b) $a_n = o(n^{-1}) \quad (n \to \infty)$

Bitte wenden!

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge monotoner Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmässig gegen f konvergiert.

b) Belegen Sie durch Gegenbeispiele, dass in a) weder auf die Monotonie der f_n noch auf die Stetigkeit der Grenzfunktion f verzichtet werden kann.

6. Sei $(a_n)_n$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Bijektion. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n \in \{\varphi \leq x\}} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{\{\varphi \leq x\}}(n).$$

(Hierbei ist $\{\varphi \leq x\}$ eine Kurzschreibweise für die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \leq x\}$.)

a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und streng monoton wachsend ist.

b) Bestimmen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

c) Folgern Sie, dass f rechtsseitig stetig und in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist, und dass jeder Punkt $x \in \mathbb{Q}$ eine Sprungstelle von f mit Sprunghöhe $a_{\varphi^{-1}(x)}$ ist.

Bemerkung: Ist x_0 Sprungstelle einer Funktion f, so ist die *Sprunghöhe* von f in x_0 der Wert

$$\left| \lim_{x \nearrow x_0} f(x) - \lim_{x \searrow x_0} f(x) \right|.$$

Challenge. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst *sprungstetig*, wenn die einseitigen Grenzwerte von f in jedem Punkt $x_0 \in [a,b]$ existieren (also in jedem $x_0 \in (a,b]$ der linksseitige und in jedem $x_0 \in [a,b)$ der rechtsseitige Grenzwert).

Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann sprungstetig ist, wenn es eine Folge $(t_n)_n$ von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ gibt, die gleichmässig gegen f konvergiert.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Was ist der Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}?$$

(a) $-1/3$

(b) $2/3$

(c) 1

(d) 2

2. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(\sqrt[3]{n+1})^n}$$

ist...

(a) ...divergent.

(b) ...konvergent.

(c) ...absolut konvergent.

(d) ...bedingt konvergent.

Bitte wenden!

3. Sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Falls g stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.

(b) Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.

(c) Falls g stetig ist, so konvergiert gf_n gleichmässig gegen gf.

(d) Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert gf_n gleichmässig gegen gf.

4. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und definiere

$$r_n := \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} a_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

(a) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch die Folge $(r_n)_n$ konvergent.

(b) Ist die Folge $(r_n)_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei I eine abzählbar unendliche Indexmenge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtnegativer reeller Zahlen. Wir wollen

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)},$$

definieren, wobei $\psi\colon \mathbb{N} \to I$ eine beliebige Bijektion ist. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) Diese Definition ist nicht sinnvoll, da der Wert einer Reihe auf die Summationsreihenfolge ankommt. Der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ hängt also von der Wahl von ψ ab.

(b) Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ konvergent ist. Denn dann ist diese Reihe wegen $a_i \geq 0$ auch absolut konvergent und die Summationsreihenfolge spielt keine Rolle, sodass der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ unabhängig von der Wahl von ψ ist.

(c) Diese Definition ist stets sinnvoll, da auch im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$ die Summationsreihenfolge keine Rolle spielt.

6. Sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1/n}$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise.

(b) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert gleichmässig.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 29. November 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 29. November 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 1. Dezember 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.