Übungsblatt 11

1. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass es verschiedene „Zweige“ des komplexen Logarithmus gibt. Dies bedingt, dass es keine natürliche Definition allgemeiner komplexer Potenzen gibt, da bei der Definition ein komplexer Logarithmus ausgewählt werden müsste. Wir wollen in dieser Aufgabe ein hieraus resultierendes Problem aufzeigen. Wie in der Vorlesung definieren wir

$$D_{\mathrm{Haupt}} := \{x + y\mathrm{i} \mid x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi, \pi]\}$$

und den *Hauptzweig* des Logarithmus

$$\log\colon \mathbb{C}^\times \to D_{\mathrm{Haupt}}$$

als die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $\exp|_{D_{\mathrm{Haupt}}}\colon D_{\mathrm{Haupt}} \to \mathbb{C}^\times$. Für $z \in \mathbb{C}^\times$ und $a \in \mathbb{C}$ versuchen wir nun eine komplexe Potenz $P(z, a)$ durch

$$P(z, a) := \exp(a \log(z))$$

zu definieren. Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass die aus dem Reellen bekannte Potenzrechenregel $x^a y^a = (xy)^a$ für P nicht gilt, also dass

$$P(z, a)P(w, a) = P(zw, a)$$

nicht für alle $a \in \mathbb{C}$ und $z, w \in \mathbb{C}^\times$ erfüllt ist.

2. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} z^n,$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^6} z^n,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}.$

Bitte wenden!

3. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ sei in $a \in U$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Folgt umgekehrt aus der Existenz dieses Grenzwerts auch die Differenzierbarkeit von f in a?

4. **a)** Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die Formel

$$\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

und folgern Sie, dass der Sinus auf $[0, \pi/2]$ streng monoton wachsend ist.

b) Verwenden Sie die Periodizitäts- und Symmetrieeigenschaften von Sinus und Kosinus um zu zeigen, dass der reelle Sinus und Kosinus durch die Werte des Sinus auf $[0, \pi/2]$ eindeutig festgelegt sind.

c) Zeigen Sie, dass die Nullstellen des komplexen Sinus genau die Zahlen $k\pi$ und die Nullstellen des komplexen Kosinus genau die Zahlen $(k + 1/2)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ sind.

5. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, welche $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$ erfüllt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Funktion

$$\overline{B_R(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wohldefiniert und stetig ist.

6. Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

konvergiert.

Hinweis: Abel-Summation.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n?$$

(a) 0

(b) 1

(c) e

(d) ∞

2. Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien A respektive B. Definiere für $n \in \mathbb{N}_0$

$$c_n := \begin{cases} a_{n/2}, & n \text{ gerade}, \\ b_{(n-1)/2}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$?

(a) $\min(A, B)$

(b) $\max(A, B)$

(c) $\min(\sqrt{A}, \sqrt{B})$

(d) $\max(\sqrt{A}, \sqrt{B})$

(e) $\min(A^2, B^2)$

(f) $\max(A^2, B^2)$

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Aussagen über die komplexe Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ treffen zu?

(a) $\exp$ ist injektiv.

(b) $\exp|_{\mathbb{R}}$ ist injektiv.

(c) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$.

(d) $\exp|_{\mathrm{i}\mathbb{R}}$ ist beschränkt.

4. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für zumindest ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

(d) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für zumindest ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

(e) Keine der obigen Aussagen.

5. Sei U eine nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{D}(U)$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $\mathcal{D}(U)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(U)$.

(b) Die Ableitungsabbildung $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{F}(U),\ f \mapsto f'$ ist linear.

(c) $\mathcal{D}(U)$ ist unendlichdimensional.

(d) Der Kern der Ableitungsabbildung $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{F}(U)$ besteht genau aus den konstanten Funktionen auf U.

Siehe nächstes Blatt!

6. Welche der folgenden Aussagen über die reellen trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treffen zu?

(a) $\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodisch.

(b) Für $x \in (-\pi/3, \pi/3)$ gilt $\sin(x) < \cos(x)$.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin\big([x - \pi/2, x + \pi/2)\big) \cup \cos\big([x, x + \pi)\big) = [-1, 1]$.

(d) Es gilt $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 6. Dezember 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 6. Dezember 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 8. Dezember 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.