Übungsblatt 12

1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital (falls sie existieren).

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(ax)}{1 - \cos(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} \right)$

2. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Zeigen Sie: Ist f in a differenzierbar, $f(a) = 0$ und ist g in a stetig, so ist das Produkt fg in a differenzierbar und es gilt $(fg)'(a) = f'(a)g(a)$.

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung.

a) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

b) Folgern Sie, dass stetig differenzierbare Funktionen auf kompakten Intervallen Lipschitz-stetig sind.

4. In dieser Aufgabe konstruieren wir eine sogenannte *Hutfunktion*, d.h. eine glatte Funktion $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $0 \leq \varphi \leq 1$ sowie $\varphi|_{\mathbb{R} \setminus (-2,2)} = 0$ und $\varphi|_{[-1,1]} = 1$ erfüllt. Dazu verwenden wir die Funktion

$$\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

aus Beispiel 7.23 im Skript und setzen

$$\varphi_0(x) := \frac{\psi(x)}{\psi(x) + \psi(1-x)} \quad \text{und} \quad \varphi(x) := \varphi_0(2+x)\varphi_0(2-x)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die so definierte Funktion $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gewünschten Eigenschaften hat.

Bitte wenden!

5. Zeigen Sie, dass Ableitungen die *Zwischenwerteigenschaft* besitzen: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so nimmt f' jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

Hinweis: Betrachten Sie für einen Wert c zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ die Funktion $g(x) = f(x) - cx$.

6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt in I links- und rechtsseitig differenzierbar ist, dass die einseitigen Ableitungen $f'_+, f'_-\colon I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend sind und dass $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ für $x_0 \in I$ gilt.

b) Folgern Sie, dass f stetig und in allen ausser höchstens abzählbar vielen Punkten differenzierbar ist.

Challenge. Wir bezeichnen mit $f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 1-periodische Fortsetzung der Funktion $[-1/2, 1/2] \ni x \mapsto |x|$ und definieren $f_n(x) := 4^{-n} f_0(4^n x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

wohldefiniert, stetig und in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Welche der folgenden Formeln für die Ableitung des Tangens in x sind korrekt?

(a) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

(b) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$

(c) $\tan'(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^2(x)}$

(d) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

2. Sei $y \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Formeln für die Ableitung des Arkustangens in y sind korrekt?

(a) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

(b) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1 - y^2}$

(c) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1 + y^2}$

(d) $\arctan'(y) = 1 + \arctan^2(y)$

Bitte wenden!

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton wachsend.

(b) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

(c) Ist f monoton wachsend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

(d) Ist f streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist f differenzierbar, so ist f gleichmässig stetig.

(b) Ist f differenzierbar in $a \in I$, so ist f stetig in a.

(c) Ist f stetig, so ist f in mindestens einem Punkt von I differenzierbar.

(d) Ist f gleichmässig stetig, so ist f in mindestens einem Punkt von I differenzierbar.

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f streng monoton.

(a) Dies gilt im Allgemeinen.

(b) Dies gilt nicht im Allgemeinen. Die Aussage stimmt aber, wenn f stetig differenzierbar ist.

(c) Selbst für stetig differenzierbares f gilt dies nicht im Allgemeinen.

Siehe nächstes Blatt!

6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f, so gilt $f'(x_0) = 0$.

(b) Ist $x_0 \in I$ kein Endpunkt von I und gilt $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 ein lokales Extremum von f.

(c) Seien $a := \inf(I)$ und $b := \sup(I)$. Dann liegen alle lokalen Extrema von f in der Menge $\{a, b\} \cup \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$.

(d) Sei $a := \inf(I) \in I$. Dann ist a ein lokales Extremum von f.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 13. Dezember 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 13. Dezember 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 15. Dezember 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.