D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 13

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x.$$

2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x$

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f_1, f_2, g \in C^k(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie: Löst eine zweimal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x),$$

so gilt $y \in C^{k+2}(I)$.

Bemerkung: Für $k = 0$ ist $C^0(I) = C(I)$ die Menge der stetigen Funktionen auf I.

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a := \inf(I) \in I$. Sei des Weiteren $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $y\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$y'(x) \le f(x)y(x)$$

für alle $x \in I$. Beweisen Sie für $x \in I$ die Ungleichung

$$y(x) \le y(a)\exp\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Hinweis: Vergleichen Sie y mit einer Lösung z der Differentialgleichung $z' = f(x)z$.

Bitte wenden!

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für stetig differenzierbare Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ der *Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung*

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

gilt. Zeigen Sie, dass diese Formel auch dann gültig ist, wenn nur vorausgesetzt wird, dass $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Riemann-Summen für f'.

6. **a)** Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right)$$

existiert und dass $\gamma \in [0,1]$ gilt. Die Zahl γ wird als *Euler-Mascheroni-Konstante* bezeichnet.

b) Es sei

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

die Gauß-Abbildung von Serie 7. Beweisen Sie

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma.$$

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Die Differentialgleichung

$$y'' + 2\sin(x)y' + y = x^2$$

ist...

(a) ...homogen und linear.

(b) ...inhomogen und linear.

(c) ...homogen und nicht linear.

(d) ...inhomogen und nicht linear.

2. Für eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^\times$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(U)$ die Menge der reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right)y = 0$$

auf U. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Ist $I \subset \mathbb{R}^\times$ ein nichtleeres, offenes Intervall, so ist $\mathcal{L}(I)$ ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(b) Ist $I = \mathbb{R}_{>0}$ oder $I = \mathbb{R}_{<0}$, so gilt für jedes $y \in \mathcal{L}(I)$

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} y'(x) = 0.$$

(c) Die Menge $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ ist ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(d) Jede Funktion $y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ besitzt eine stetig differenzierbare Fortsetzung $\bar{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

(e) Jede Funktion $y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ besitzt eine glatte Fortsetzung $\bar{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Ansätze sind zum Bestimmen einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \cos(x)$$

zielführend?

(a) $y = c\mathrm{e}^x \cos(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

(b) $y = cx\mathrm{e}^x \cos(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

(c) $y = c_1 x\mathrm{e}^x \cos(x) + c_2 x\mathrm{e}^x \sin(x)$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y = c_1 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + c_2 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

(e) $y = c_1 x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + c_2 x\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist I kompakt und f Riemann-integrierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

(b) Ist f stetig, so besitzt f eine Stammfunktion.

(c) Ist f differenzierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

(d) Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f differenzierbar.

(e) Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f stetig.

(f) Besitzt f eine Stammfunktion und ist I kompakt, so ist f Riemann-integrierbar.

Siehe nächstes Blatt!

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \begin{cases} 1/n, & n \equiv 1 \text{ oder } 2 \mod 4, \\ -1/n, & n \equiv 0 \text{ oder } 3 \mod 4. \end{cases}$$

Was ist der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(a) $\pi/4 + \log(2)$

(b) $\pi/2 - \log(2)$

(c) $\pi/4 + \log(2)/2$

(d) $\pi/8 - 2\log(2)$

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Mittwoch, 20. Dezember 2017, 11:00, unter `http://tiny.cc/vorxn/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Mittwoch, 20. Dezember 2017, 15:15, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27, per E-Mail an Ihren Übungsleiter oder im Kolloquium.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Freitag, 22. Dezember 2017, 8:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.