MC-Aufgaben Übungsblatt 8

Einsendeschluss: Freitag, 17. November 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Was ist der Wert von

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}+\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}?$$

(a) 0

✓ (b) 1/e

(c) 2/e

(d) Einer dieser Grenzwerte existiert nicht.

Wir wissen aufgrund von Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktion (vgl. Abschnitt 5.3 im Skript), dass $\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = \exp(-1) = 1/\mathrm{e}$ gilt. Da Teilfolgen konvergenter Folgen wiederum konvergent sind und denselben Grenzwert besitzen, erhalten wir daraus sofort

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = 1/\mathrm{e}.$$

Wegen $1/\mathrm{e} < 1$ impliziert die obige Konvergenz auch, dass für fixiertes $1/\mathrm{e} < s < 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $(1-1/n)^n < s$ für $n \geq N$. Nach Beispiel 5.13 gilt $\lim_{n\to\infty} s^n = 0$, also folgt mit dem Sandwich-Lemma (Lemma 5.31) auch

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} s^n = 0.$$

Die gesuchte Summe ist demnach 1/e.

2. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}^\times$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{\infty, -\infty\}$ folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.

Die Voraussetzung impliziert $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Gegeben $\varepsilon > 0$ wähle $K > 0$ mit $1/K < \varepsilon$ und dazu ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > K$ für alle $n \geq N$. Dann gilt $|1/a_n| < 1/K < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n \in \{\infty, -\infty\}$.

Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n/n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ aber $1/a_n = (-1)^n n$ ist nicht konvergent.

√ (c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = \infty$.

Die Richtung „$\Longleftarrow$" folgt aus (a). Für „$\Longrightarrow$" wähle zu $K > 0$ ein $\varepsilon > 0$ mit $1/\varepsilon > K$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Wegen $|a_n| > 0$ folgt hieraus $1/|a_n| > 1/\varepsilon > K$ für $n \geq N$, also $\lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = \infty$.

3. Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{a_{n+1}}{n+1} \frac{n}{a_n} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 1$

Gegenbeispiel: $a_n = n + (-1)^n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$ aber $a_{n+1} - a_n = 1 - 2(-1)^n$ konvergiert nicht.

4. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente reelle Folgen mit Grenzwerten a respektive b. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq b$.

√ (b) Gilt $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq b$.

Ist $a > b$, so muss $a_n > b_n$ für alle bis auf endlich viele n gelten (vgl. Proposition 5.30(ii)). Dies beweist (b) und somit auch (a).

(c) Gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a < b$.

Gegenbeispiel: $a_n = 1/n$, $b_n = 2/n$. Dann gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber $a = b = 0$.

5. Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge mit der Eigenschaft, dass alle konvergenten Teilfolgen $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ denselben Grenzwert besitzen. Dann ist $(a_n)_n$ konvergent.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $a \in \mathbb{R}$ der gemeinsame Grenzwert aller konvergenten Teilfolgen. Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ für welches für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ existiert mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ mit $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $(a_{n_k})_k$ beschränkt ist, können wir eine weitere Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_j$ auswählen, die konvergent ist. Setze $m_j := n_{k_j}$. Dann ist nach Konstruktion $(a_{m_j})_j$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$ mit $|a_{m_j} - a| \geq \varepsilon$ für alle $j \in \mathbb{N}$, was der Annahme widerspricht, dass alle konvergenten Teilfolgen von $(a_n)_n$ denselben Grenzwert a besitzen. Es muss also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gelten.

6. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte reelle Folgen. Welche der folgenden Aussagen über den Limes Superior sind im Allgemeinen korrekt?

(a) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$

Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$, $b_n = -a_n$. Dann ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ aber $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} 0 = 0$.

√ (b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sup_{k\geq n}(a_n + b_n) \leq \sup_{k\geq n} a_n + \sup_{k\geq n} b_n$. Die Aussage folgt nun durch den Grenzübergang $n \to \infty$.

√ (c) Ist $(b_n)_n$ konvergent, so gilt $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

Der Limes Superior ist genau der grösste Häufungspunkt einer Folge (vgl. Satz 5.44). Ist $(b_n)_n$ konvergent mit Grenzwert b, so sind die Häufungspunkte von $(a_n + b_n)_n$ genau von der Form $a + b$ für Häufungspunkte a von $(a_n)_n$. Dies impliziert die Aussage.

√ (d) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq 0$ für $n \geq N$ und gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aus den Bedingungen folgt $0 \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n = 0$. Also gilt nach Korollar 5.43 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(e) Gibt es eine Folge $(n_k)_k$ von Indizes mit $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = 0$, $n_k = 2k$. Dann ist $a_{n_k} = -1 \leq 0 = b_{n_k}$ aber $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 > 0 = \limsup_{n\to\infty} b_n$.

7. Welche der folgenden Aussagen über den Logarithmus sind korrekt?

(a) log ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}_{>0}$.

√ (b) log ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$.

(c) log ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_{>0}$.

Da exp bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_{>0}$ ist, ist log als Umkehrabbildung von exp bijektiv von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$.

(d) $\log(x+y) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$.

(e) $\log(x+y) = \log(x)\log(y)$ für alle $x, y > 0$.

Es gibt keine allgemeingültige Formel für $\log(x+y)$. Die Funktionalgleichung des Logarithmus lautet $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ $(x, y > 0)$.

(f) Da log die Umkehrabbildung von exp ist und exp streng monoton wachsend ist, ist log streng monoton fallend.

√ (g) Da log die Umkehrabbildung von exp ist und exp streng monoton wachsend ist, ist log streng monoton wachsend.

Ist $0 < x < y$, so folgt $\exp(\log(x)) = x < y = \exp(\log(y))$, also mit der strengen Monotonie von exp auch $\log(x) < \log(y)$.