D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis I HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

MC-Aufgaben Übungsblatt 1

Einsendeschluss: Freitag, 29. September 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

√ (a) $A \vee \neg A$

Tertium non datur: Die Aussage A oder ihr Gegenteil $\neg A$ muss gelten.

(b) $((A \implies B) \wedge B) \implies A$

Die Aussage B kann auch aus anderen Gründen gelten, nicht nur wenn die Aussage A wahr ist und B impliziert. Anschaulich klar macht das wie in Aufgabe 1. das Einsetzen von z.B. $A =$ (es regnet) und $B =$ (die Strasse ist nass).

(c) $((A \vee B) \wedge A) \implies \neg B$

Das logische Oder „$\vee$“ ist nicht ausschliessend: $A \vee B$ ist auch wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

√ (d) $(A \wedge \neg A) \implies B$

Ex falso quodlibet: Nach Definition der Implikation „$\implies$“ folgt aus der immer falschen Aussage $A \wedge \neg A$ jede beliebige Aussage.

Die formale Verifikation erfolgt jeweils durch Aufstellen der Wahrheitstafeln.

2. Das *ausschliessende Oder* XOR ist definiert durch die Festsetzung, dass $A \,\mathrm{XOR}\, B$ genau dann wahr sein soll, wenn genau eine der Aussagen A und B wahr ist. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu $A \,\mathrm{XOR}\, B$?

(a) $(A \implies \neg B) \vee (\neg B \implies A)$

√ (b) $A \iff \neg B$

√ (c) $(\neg A \implies B) \wedge (B \implies \neg A)$

(d) $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$

√ (e) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Die Wahrheitstafel von $A \,\mathrm{XOR}\, B$ lautet:

A	B	$A \,\mathrm{XOR}\, B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Aufstellen der Wahrheitstafeln der obigen Aussagen und Vergleichen mit diesem gewünschten Resultat liefert die Lösung.

3. Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist die Aussage

$$\forall x \in X : x^2 \leq 0$$

notwendigerweise falsch.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Für $X = \emptyset$ ist die Aussage wahr, denn es gibt kein Element $x \in X$ für das man die Wahrheit der Aussage $x^2 \leq 0$ überprüfen müsste. Allgemeiner gilt: $\forall x \in \emptyset \colon A(x)$ ist unabhängig von der Aussage $A(x)$ immer wahr.

In allen folgenden Fragen befinden Sie sich wie in Aufgabe 5. auf der Insel der Ritter und Knappen. Folgende Ereignisse tragen sich dort zu.

4. Sie treffen auf einen entnervt aussehenden Einwohner. Besorgt fragen Sie ihn: „Geht es Ihnen gut?“ Darauf erhalten Sie die verärgerte Antwort: „Das werde ich doch Ihnen nicht verraten!“ Anschliessend macht er sich davon und wurde nicht mehr gesehen. Was schliessen Sie daraus über diesen Einwohner?

√ (a) Er ist ein Ritter.

(b) Er ist ein Knappe.

(c) Nichts.

Seine Aussage war wahr: Er hat Ihnen tatsächlich nicht verraten ob es ihm gut geht.

5. Sie treffen Frank auf der Insel. Stolz berichtet er: „Mein Vater hat einmal gesagt, dass er und ich unterschiedliche Typen haben; dass einer von uns ein Ritter, der andere ein Knappe ist.“ Kann sein Vater dies tatsächlich behauptet haben?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Hätte sein Vater dies behauptet, so müsste Frank ein Knappe sein. (Wieso?) Dann hat Frank aber gelogen, und sein Vater hat diese Aussage nicht getätigt.

6. Sie treffen auf einen Einwohner mit langem Bart. Er verkündet: „Ich habe diese Aussage im letzten Jahr schon einmal gemacht.“ Was schliessen Sie über diesen Einwohner?

(a) Er ist ein Ritter.

√ (b) Er ist ein Knappe.

(c) Nichts.

Wäre er ein Ritter, so wäre seine Aussage wahr und er müsste dieselbe Aussage vor einem Jahr schon einmal gemacht haben. Damals war sie aber auch schon wahr. Iterativ folgt, dass er diese Aussage beliebig weit in der Vergangenheit gemacht hat, was einen Widerspruch darstellt. (Implizite Annahme: Keiner der Einwohner lebt schon unendlich lange.)

7. Nach Ihrer Abreise von der Insel treffen Sie einen Soziologen, der die Einwohner der Insel studiert hat (und selbst kein Einwohner der Insel ist). Er berichtet von seiner kuriosen Feststellung, dass es für jeden Einwohner Y der Insel einen Einwohner X gibt, der behauptet, dass sowohl X als auch Y Knappen sind. Wie viele Einwohner hat die Insel?

$\surd$ (a) Weniger als 10.

(b) Mindestens 10, weniger als 100.

(c) Mindestens 100.

(d) Das kann man nicht entscheiden.

Sei Y ein Einwohner der Insel. Wenn X ein Einwohner ist, der behauptet, dass X und Y Knappen sind, dann muss X ein Knappe und Y ein Ritter sein. (Wieso?) Somit ist Y ein Ritter, was zeigt, dass alle Einwohner der Insel Ritter sind. Gibt es nun einen solchen Einwohner Y, so müsste es nach dem oben Festgestellten einen zugehörigen Einwohner X geben, der ein Knappe ist, was einen Widerspruch darstellt. Also ist die Insel unbewohnt.