MC-Aufgaben Übungsblatt 12

Einsendeschluss: Freitag, 15. Dezember 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Sei $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Welche der folgenden Formeln für die Ableitung des Tangens in x sind korrekt?

√ (a) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

(b) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$

(c) $\tan'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$

√ (d) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Nach der Quotientenregel (Korollar 7.11) gilt

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

2. Sei $y \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Formeln für die Ableitung des Arkustangens in y sind korrekt?

(a) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

(b) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$

√ (c) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$

(d) $\arctan'(y) = 1 + \arctan^2(y)$

Wähle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ mit $y = \tan(x)$. Dann gilt nach dem Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion (Satz 7.14)

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

$\surd$ (a) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton wachsend.

$\surd$ (b) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

Siehe Korollar 7.35.

$\surd$ (c) Ist f monoton wachsend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

Für $h \neq 0$ gilt aufgrund der Monotonie von f

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

In der Tat, entweder gilt $h > 0$, woraus $f(x+h) - f(x) \geq 0$ folgt, oder es ist $h < 0$ und $f(x+h) - f(x) \leq 0$. Der Grenzübergang $h \to 0$ ergibt die Aussage.

(d) Ist f streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.

Gegenbeispiel: $I = (-1, 1)$, $f: x \mapsto x^3$. Dann ist f streng monoton wachsend, aber es gilt $f'(0) = 0$.

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist f differenzierbar, so ist f gleichmässig stetig.

Gegenbeispiel: $I = \mathbb{R}$, $f: x \mapsto x^2$.

$\surd$ (b) Ist f differenzierbar in $a \in I$, so ist f stetig in a.

Vgl. Gleichung (7.2) im Skript.

(c) Ist f stetig, so ist f in mindestens einem Punkt von I differenzierbar.

(d) Ist f gleichmässig stetig, so ist f in mindestens einem Punkt von I differenzierbar.

Die Einschränkung der Funktion f aus der Challenge-Aufgabe auf $[0, 1]$ liefert ein Gegenbeispiel für (d), also auch für (c).

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f streng monoton.

√ (a) Dies gilt im Allgemeinen.

(b) Dies gilt nicht im Allgemeinen. Die Aussage stimmt aber, wenn f stetig differenzierbar ist.

(c) Selbst für stetig differenzierbares f gilt dies nicht im Allgemeinen.

Wäre f nicht streng monoton, so gäbe es Punkte $a, b, c \in I$ mit $a < b < c$, so dass entweder $f(b) \geq \max\{f(a), f(c)\}$ oder $f(b) \leq \min\{f(a), f(c)\}$ gilt. Der Zwischenwertsatz impliziert dann die Existenz von Punkten $x, y \in I$ mit $x < y$ und $f(x) = f(y)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 7.28) gibt es dann ein $z \in I$ mit $f'(z) = 0$; ein Widerspruch.

6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Gegenbeispiel: $I = [0, 1]$, $f\colon x \mapsto x$, $x_0 = 0$. Dann ist x_0 ein lokales (sogar globales) Minimum von f aber es gilt $f'(x_0) = f'(0) = 1$. Die Aussage gilt jedoch, wenn x_0 kein Endpunkt von I ist (siehe Proposition 7.17).

(b) Ist $x_0 \in I$ kein Endpunkt von I und gilt $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 ein lokales Extremum von f.

Gegenbeispiel: $I = (-1, 1)$, $f\colon x \mapsto x^3$, $x_0 = 0$. Dann ist $f'(x_0) = f'(0) = 0$ aber x_0 ist kein lokales Extremum von f.

√ (c) Seien $a := \inf(I)$ und $b := \sup(I)$. Dann liegen alle lokalen Extrema von f in der Menge $\{a, b\} \cup \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$.

Siehe Korollar 7.18.

(d) Sei $a := \inf(I) \in I$. Dann ist a ein lokales Extremum von f.

Gegenbeispiel: $I = [0, 1]$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ für $x > 0$, $f(0) = 0$. Dann ist f differenzierbar (vgl. Beispiel 7.20), aber f nimmt in jeder Umgebung von 0 sowohl positive als auch negative Werte an. Also ist $0 = \inf(I)$ kein lokales Extremum von f.