MC-Aufgaben Übungsblatt 4

Einsendeschluss: Freitag, 20. Oktober 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Welcher Ausdruck entspricht stets $\sqrt{x^2}$?

(a) x

Gegenbeispiel: $x = -1$. Dann ist $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1 = x$.

(b) $\pm x$

Dies ist ohne Kontext kein eindeutig bestimmter Ausdruck falls $x \neq 0$, wohingegen $\sqrt{x^2}$ definiert ist als die eindeutig bestimmte nichtnegative Quadratwurzel von x^2.

√ (c) $|x|$

(d) Keiner der obigen Ausdrücke.

Ist $x \geq 0$, so ist x die eindeutig bestimmte nichtnegative Quadratwurzel von x^2 und per Definition ist auch $|x| = x$, also gilt in diesem Fall $\sqrt{x^2} = |x|$. Ist $x < 0$, so ist $|x| = -x$ die eindeutig bestimmte nichtnegative Quadratwurzel von x^2, also ist auch in diesem Fall $\sqrt{x^2} = |x|$.

2. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2}$.

Die korrekte Formel lautet $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

(b) $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2$.

Gegenbeispiel: $z = \mathrm{i}$. Dann gilt $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(\mathrm{i}^2) = \operatorname{Re}(-1) = -1$ aber $(\operatorname{Re} z)^2 = 0^2 = 0$.

√ (c) $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

Vgl. Definition 2.51 im Skript.

(d) Aus $z^4 = w^4$ folgt $z = \pm w$.

Gegenbeispiel: $z = 1$, $w = \mathrm{i}$. Dann gilt $z^4 = w^4 = 1$ aber weder $z = w$ noch $z = -w$. Was man aus $z^4 = w^4$ aber folgern kann, ist, dass $z = \pm w$ oder $z = \pm \mathrm{i}w$ gilt.

(e) Keine der obigen Aussagen.

3. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ offene Teilmengen. Dann ist der Durchschnitt $A \cap B \ldots$

(a) ...offen und nicht abgeschlossen.

Gegenbeispiel: $A = B = \mathbb{R}$. Dann ist $A \cap B = \mathbb{R}$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

(b) ...offen und abgeschlossen.

Gegenbeispiel: $A = B = (0, \infty)$. Dann ist $A \cap B = (0, \infty)$ nicht abgeschlossen. In der Tat, das Komplement $(-\infty, 0]$ ist nicht offen, da diese Menge keine Umgebung des Punktes 0 enthält.

$\surd$ (c) ...offen.

(d) ...nicht notwendigerweise offen.

Ist $x \in A \cap B$ so gibt es wegen der Offenheit von A, B positive Zahlen $\delta_A, \delta_B > 0$ mit $(x - \delta_A, x + \delta_A) \subset A$ und $(x - \delta_B, x + \delta_B) \subset B$. Mit $\delta := \min(\delta_A, \delta_B)$ gilt dann $(x - \delta, x + \delta) \subset A \cap B$. Somit ist $A \cap B$ nach Definition offen.

4. Eine Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen ist, die Lösbarkeit der Gleichung $z^2 = -1$ zu erreichen. Wie viele Lösungen besitzt diese Gleichung nun in $\mathbb{C}$?

(a) 0

(b) 1

$\surd$ (c) 2

(d) Man braucht mehr Informationen um das zu entscheiden.

Die Faktorisierung $z^2 + 1 = (z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})$ und die Nullteilerfreiheit (Folgerung (i) aus den Körperaxiomen) von $\mathbb{C}$ zeigen, dass $z^2 + 1 = 0$ genau dann gilt wenn $z = \pm\mathrm{i}$.

5. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

$\surd$ (a) Gilt $A \subset B$, so folgt $\sup A \leq \sup B$.

Wegen der Inklusion $A \subset B$ ist $\sup B$ eine obere Schranke von A. Das Supremum von A ist als kleinste obere Schranke von A somit höchstens $\sup B$.

(b) Gilt $\sup A \leq \sup B$, so gibt es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $a \leq b$.

Gegenbeispiel: $A = [1, 2]$, $B = [0, 2]$. Dann ist $\sup A = 2 \leq 2 = \sup B$ und es gibt für $b = 0 \in B$ kein $a \in A$ mit $a \leq b$.

$\surd$ (c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Siehe Proposition 2.63 im Skript.

(d) $\sup(AB) = \sup A \sup B$, wobei $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

Gegenbeispiel: $A = \{-1\}$, $B = [0, 1]$. Dann gilt $\sup(AB) = \sup([-1, 0]) = 0$ aber $\sup A \sup B = (-1) \cdot 1 = -1$. Die Aussage gilt aber, wenn $A, B \subset [0, \infty)$ (siehe Übung 2.73 im Skript).

$\surd$ (e) Existiert das Maximum der Menge A, so gilt $\max A = \sup A$.

Das Maximum $\max A$ ist, wenn es existiert, eine obere Schranke von A, und es kann keine kleinere obere Schranke geben, da nach Definition eines Maximums $\max A \in A$ gilt. Also ist $\max A$ die kleinste obere Schranke von A, und dies ist die definierende Eigenschaft des Supremums.

$\surd$ (f) Ist $\sup A \in A$, so existiert das Maximum von A.

Da das Supremum von A per Definition eine obere Schranke von A ist, erfüllt es im Fall $\sup A \in A$ die definierende Eigenschaft eines Maximums von A.

6. Betrachten Sie die Menge

$$X = \left\{ \max\left(\frac{(-1)^n}{1+n}, \frac{1}{2^n} \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) $\sup X = 1$

(b) $\max X = 1$

$\surd$ (c) $\sup X = \frac{1}{2}$

$\surd$ (d) $\max X = \frac{1}{2}$

$\surd$ (e) $\inf X = 0$

(f) $\min X = 0$

(g) $\inf X = -\frac{1}{2}$

(h) $\min X = -\frac{1}{2}$

Die Menge X ist die Vereinigung der beiden Mengen

$$A = \left\{ \frac{1}{1+2n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$B = \left\{ \frac{1}{2^{2n-1}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Anhand dieser konkreten Darstellung $X = A \cup B$ sieht man, dass $\frac{1}{2} \in B$ das Maximum (somit auch das Supremum) von X ist. (Merke: Nach unserer Konvention ist $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, d.h. $0 \notin \mathbb{N}$.) Wegen des Archimedischen Prinzips ist $\inf A = 0$. Da $X \subset [0, \infty)$ und $A \subset X$ ist, folgt dann $0 \leq \inf X \leq \inf A = 0$, also $\inf X = 0$. Wegen $0 \notin X$ besitzt X aber kein Minimum.