D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis I HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

MC-Aufgaben Übungsblatt 11

Einsendeschluss: Freitag, 8. Dezember 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n ?$$

√ (a) 0

(b) 1

(c) e

(d) ∞

Unter Verwendung des Quotientenkriteriums (Lemma 6.59) erhalten wir für den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2. Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien A respektive B. Definiere für $n \in \mathbb{N}_0$

$$c_n := \begin{cases} a_{n/2}, & n \text{ gerade}, \\ b_{(n-1)/2}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$?

(a) $\min(A, B)$

(b) $\max(A, B)$

√ (c) $\min(\sqrt{A}, \sqrt{B})$

(d) $\max(\sqrt{A}, \sqrt{B})$

(e) $\min(A^2, B^2)$

(f) $\max(A^2, B^2)$

Sei R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ dann absolut konvergent. Insbesondere konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^2)^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z^2)^n$$

absolut. Es gilt also $\min(A, B) \geq |z^2|$, und da dies für jedes z mit $|z| < R$ gilt, folgt $R \leq \min(\sqrt{A}, \sqrt{B})$ (vgl. Satz 6.55). Ist umgekehrt $|z| < \min(\sqrt{A}, \sqrt{B})$, so konvergieren die beiden obigen Reihen absolut, und demnach auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Es folgt $|z| \leq R$, und wir schliessen genau wie zuvor auf $\min(\sqrt{A}, \sqrt{B}) \leq R$. Damit haben wir $R = \min(\sqrt{A}, \sqrt{B})$ gezeigt.

3. Welche der folgenden Aussagen über die komplexe Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ treffen zu?

(a) exp ist injektiv.

Nach Satz 6.73 gilt $\exp(2\pi \mathrm{i}) = \exp(0) = 1$.

$\surd$ (b) $\exp|_{\mathbb{R}}$ ist injektiv.

Die reelle Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.

$\surd$ (c) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}$.

Wegen $\exp(-z) = \exp(z)^{-1}$ ist $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Unter Verwendung der Polarkoordinatendarstellung (Lemma 6.80, siehe auch Abschnitt 6.6.5) sieht man, dass auch alle Zahlen $z \in \mathbb{C}^{\times}$ im Bild von exp vorkommen.

$\surd$ (d) $\exp|_{\mathrm{i}\mathbb{R}}$ ist beschränkt.

In Abschnitt 6.5.4 wird gezeigt, dass $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt. Es folgt $|\exp(\mathrm{i}\theta)| = \exp(0) = 1$ für jedes $\theta \in \mathbb{R}$.

4. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für zumindest ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist ein Gegenbeispiel für (b) (also auch für (a)). Ihr Konvergenzradius R ist 1 und nach Beispiel 6.3 divergiert sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

(d) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für zumindest ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

Ein Gegenbeispiel für (d) (also auch für (c)) ist gegeben durch $a_0 = 1$, $a_n = 1/n^2$ für $n \geq 1$. Die zugehörige Potenzreihe hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1/n^2|}} = 1$$

und für $|z| = 1$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 |z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ (absolut) konvergiert.

$\surd$ (e) Keine der obigen Aussagen.

5. Sei U eine nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{D}(U)$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) $\mathcal{D}(U)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(U)$.

√ (b) Die Ableitungsabbildung $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{F}(U)$, $f \mapsto f'$ ist linear.

Siehe Proposition 7.4.

√ (c) $\mathcal{D}(U)$ ist unendlichdimensional.

Da U offen und nichtleer ist gilt $|U| = \infty$. Ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ ist also durch die Einschränkung $f|_U$ eindeutig bestimmt. Dies bedeutet, dass die (lineare) Inklusionsabbildung $\mathbb{R}[x] \to \mathcal{D}(U)$ injektiv ist. Da $\mathbb{R}[x]$ unendlichdimensional ist, gilt dies also auch für $\mathcal{D}(U)$.

(d) Der Kern der Ableitungsabbildung $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{F}(U)$ besteht genau aus den konstanten Funktionen auf U.

Gegenbeispiel: $U = (0,1) \cup (2,3)$, $f(x) = 0$ für $x \in (0,1)$ und $f(x) = 1$ für $x \in (2,3)$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = 0$ aber f ist nicht konstant. Die Aussage gilt jedoch (sogar genau dann) wenn U ein Intervall ist (vgl. Korollar 7.32).

6. Welche der folgenden Aussagen über die reellen trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treffen zu?

√ (a) sin und cos sind 2π-periodisch.

Siehe Korollar 6.74.

(b) Für $x \in (-\pi/3, \pi/3)$ gilt $\sin(x) < \cos(x)$.

Für $x = \pi/4$ gilt $\sin(x) = \cos(x) = \sqrt{2}/2$ (vgl. Satz 6.73).

√ (c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin\big([x - \pi/2, x + \pi/2)\big) \cup \cos\big([x, x + \pi)\big) = [-1, 1]$.

Aus der Formel $\sin(y+\pi/2) = \cos(y)$ (vgl. Korollar 6.74) folgt $\sin([x-\pi/2, x+\pi/2)) = \cos([x - \pi, x))$, also

$$\sin([x - \pi/2, x + \pi/2)) \cup \cos([x, x + \pi)) = \cos([x - \pi, x + \pi)).$$

Die Gleichung $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ impliziert die Ungleichung $|\cos(y)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$, sodass sicherlich $\cos([x - \pi, x + \pi)) \subset [-1, 1]$ erfüllt ist. Um Gleichheit zu zeigen reicht es aufgrund der Stetigkeit von cos und dem Zwischenwertsatz zu zeigen, dass $\pm 1 \in \cos([x - \pi, x + \pi))$ gilt. Nun ist $[x - \pi, x + \pi)$ ein halboffenes Intervall der Länge 2π, es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $2k\pi \in [x - \pi, x + \pi)$. Dann liegt auch eine der Zahlen $2k\pi \pm \pi$ in diesem Intervall. Aufgrund der 2π-Periodizität von cos und Satz 6.73 folgt nun

$$\cos(2k\pi) = \cos(0) = 1, \; \cos(2k\pi \pm \pi) = \cos(\pi) = -1.$$

Es gilt also tatsächlich $\pm 1 \in \cos([x - \pi, x + \pi))$, und wie oben argumentiert ergibt dies die Aussage.

√ (d) Es gilt $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nach der Additionsformel für den Cosinus (vgl. Satz 6.71) gilt

$$\cos(\pi/2 - x) = \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} \cos(-x) - \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin(x)} = \sin(x),$$

wobei wir verwendet haben, dass der Sinus eine ungerade Funktion ist.