MC-Aufgaben Übungsblatt 7

Einsendeschluss: Freitag, 10. November 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n} \,\mathrm{d}x?$$

(a) $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

(b) $n^{-1}\left(\sqrt{n} - 1\right)$

√ (c) $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

(d) $n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

Der Integrand $\frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n}$ hat für $0 \leq k \leq n-1$ auf dem Intervall $\left[\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}\right)$ den Wert $\frac{k}{n}$. Also ist

$$\int_0^1 \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n}\left(\sqrt{\frac{k+1}{n}} - \sqrt{\frac{k}{n}}\right) = n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Bemerkung: Die erhaltene Summe ist eine sogenannte *Riemann-Summe* für das Integral $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$; für $n \to \infty$ „konvergiert“ sie daher gegen $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = 1/3$. Dies wird im folgenden Kapitel über Konvergenz präzisiert werden.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Positiv- und Negativteil f^+ und f^- von f seien definiert wie in Abschnitt 4.3.2 des Skripts. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Ist f Riemann-integrierbar, so sind f^+, f^- und $|f|$ Riemann-integrierbar.

Dies folgt aus dem Beweis von Satz 4.24 im Skript und der Formel $f^- = f^+ - f$ (vgl. Übung 4.23) zusammen mit der Vektorraumstruktur von $\mathcal{R}([a, b])$ (Satz 4.19).

(b) Ist $|f|$ Riemann-integrierbar, so sind f^+, f^- und f Riemann-integrierbar.

Gegenbeispiel: Sei g die Dirichlet-Funktion aus Beispiel 4.17 im Skript und $f := 2g - 1$ (sodass $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = -1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt). Dann ist f nicht Riemann-integrierbar (da ansonsten auch g Riemann-integrierbar wäre), aber $|f|$ ist die konstante Funktion 1 und damit Riemann-integrierbar.

√ (c) Sind zumindest zwei der Funktionen f, $|f|$, f^+, f^- Riemann-integrierbar, so sind alle dieser Funktionen Riemann-integrierbar.

Verwende die Gleichungen $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$ (vgl. Übung 4.23) und die Vektorraumstruktur von $\mathcal{R}([a, b])$ (Satz 4.19).

3. Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ und sowohl $f\colon [a, b] \to [c, d]$ als auch $g\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch die Komposition $g \circ f$ Riemann-integrierbar.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Gegenbeispiel: Sei $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ die modifizierte Dirichlet-Funktion aus Aufgabe 6.a) und $g = \operatorname{sgn}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ die Signumfunktion eingeschränkt auf $[0, 1]$. Dann sind sowohl f als auch g Riemann-integrierbar, aber $g \circ f$ ist die Dirichlet-Funktion, welche nicht Riemann-integrierbar ist.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

$\checkmark$ (a) Ändert man den Wert von f in genau einem Punkt, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^b f^* \, \mathrm{d}x$.

Unter- und Obersummen bleiben gleich, wenn man die involvierten Treppenfunktionen an einem einzelnen Punkt abändert.

$\checkmark$ (b) Ändert man den Wert von f in endlich vielen Punkten, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^b f^* \, \mathrm{d}x$.

Iteriere Aussage (a).

(c) Ändert man den Wert von f in abzählbar vielen Punkten, so ist die erhaltene Funktion f^* auch Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^b f^* \, \mathrm{d}x$.

Gegenbeispiel: Wähle $f = 0$ und für f^* die Dirichlet-Funktion. Dann unterscheiden sich f und f^* in abzählbar unendlich vielen Punkten, aber f^* ist nicht Riemann-integrierbar.

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t$ für alle $x \in [a, b]$. Folgt hieraus $f \leq g$?

(a) Ja.

(b) Ja, falls f und g stetig sind.

(c) Ja, falls f und g stetig sind und $f(a) = g(a)$.

$\checkmark$ (d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Ein Gegenbeispiel für (c) (und somit auch für (a) und (b)) lautet wie folgt: $a = 0$, $b = 3$, $f = 0$, $g \colon x \mapsto 1 - |x - 1|$. Davon, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind, überzeugt man sich am besten anhand einer Skizze des Graphen von g und der Interpretation des Integrals als signierter Flächeninhalt. Es gilt aber $f(3) = 0 > -1 = g(3)$, und somit nicht $f \leq g$.

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $U(f)$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Ist $U(f)$ endlich, so ist f Riemann-integrierbar.

Wegen der Additivitätseigenschaft des Integrals bzgl. Intervallen reicht es zu argumentieren, dass jede beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf (a,b) stetig ist, Riemann-integrierbar ist. Dies sieht man wie folgt: Sei $M > 0$ mit $|f| \leq M$. Gegeben $\varepsilon > 0$ wähle $a < a' < b' < b$ mit $a' - a + b - b' < \varepsilon/(4M)$. Dann ist $f|_{[a',b']}$ auf $[a',b']$ stetig, also Riemann-integrierbar. Somit gibt es nach Proposition 4.12(iii) Treppenfunktionen $u' \leq f|_{[a',b']} \leq o'$ auf $[a',b']$ mit $\int_{a'}^{b'} (o' - u')\,\mathrm{d}x < \varepsilon/2$. Setze o' durch den Wert M und u' durch den Wert $-M$ auf $[a,b]$ fort und nenne die so erhaltenen Funktionen o und u. Dann sind o, u Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $u \leq f \leq o$ und

$$\int_a^b (o - u)\,\mathrm{d}x < \varepsilon/2 + 2M(a' - a + b - b') < \varepsilon.$$

Nach Proposition 4.12(iii) ist f somit Riemann-integrierbar.

√ (b) Besitzt die Menge $U(f)$ höchstens einen Häufungspunkt, so ist f Riemann-integrierbar.

Hat $U(f)$ keinen Häufungspunkt, so muss $U(f)$ endlich sein (vgl. Satz 2.75) und wir sind in der Situation von (a). Anderenfalls sei $x_0 \in [a,b]$ der Häufungspunkt von $U(f)$. Ist $O = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ eine Umgebung von x_0, so ist (wiederum nach (a)) f über $[a,b] \setminus O$ Riemann-integrierbar. (Merke: $[a,b] \setminus O$ ist entweder ein kompaktes Intervall oder die disjunkte Vereinigung von zwei kompakten Intervallen. In letzterem Fall ist die „Riemann-Integrierbarkeit von f" auf beiden Intervallen separat zu verstehen.) Dasselbe Argument wie im Beweis von (a) (also Fortsetzen von geeigneten Treppenfunktionen von $[a,b] \setminus O$ auf $[a,b]$) funktioniert dann auch im vorliegenden Fall und zeigt die Riemann-Integrierbarkeit von f.

(c) Ist $U(f)$ überabzählbar, so ist f nicht Riemann-integrierbar.

Gegenbeispiel: Seien $a = 0$, $b = 1$ und f die charakteristische Funktion der Cantormenge C (vgl. Abschnitt 2.6.5 im Skript). Dann ist $U(f) = C$ (wieso?), also ist $U(f)$ überabzählbar (vgl. Korollar 2.83). Allerdings ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion o_n der Menge C_n (Notation wie im Skript) eine Treppenfunktion mit $f \leq o_n$ und $\int_0^1 o_n\,\mathrm{d}x = (2/3)^n$. Weiters ist $u = 0$ eine Treppenfunktion mit $f \geq u$ und $\int_0^1 u\,\mathrm{d}x = 0$. Wegen $\inf_{n\in\mathbb{N}} (2/3)^n = 0$ (wie aus der Bernoullischen Ungleichung und dem Archimedischen Prinzip folgt) ergibt sich die Riemann-Integrierbarkeit von f somit wieder aus Proposition 4.12(iii). (Genauer haben wir sogar $\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = 0$ gezeigt.)