D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis I HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

MC-Aufgaben Übungsblatt 9

Einsendeschluss: Freitag, 24. November 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Die Funktion

$$\mathbb{R} \ni a \mapsto \lim_{x\to\infty} x^a \exp(-x)$$

ist...

(a) ...nicht wohldefiniert.

(b) ...streng monoton wachsend.

√ (c) ...konstant.

(d) ...streng monoton fallend.

Für $a < 0$ ist der Grenzwert 0, da in diesem Fall für $x \to \infty$ sowohl $x^a = \exp(a\log(x)) \to 0$ als auch $\exp(-x) \to 0$ gelten. Für $a \geq 0$ setze $N := \lceil a \rceil \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt $x^a \leq x^N$ für $x \geq 1$. Da für solche x die Folge $((1 + x/n)^n)_n$ für $n \to \infty$ monoton wachsend gegen $\exp(x)$ konvergiert (vgl. Abschnitt 5.3.2 im Skript) gilt $\exp(x) \geq (1 + x/(N+1))^{N+1} \geq c^{-1}x^{N+1}$ (wobei $c = (N+1)^{N+1}$), also auch $\exp(-x) \leq cx^{-(N+1)}$. Wir schliessen

$$0 \leq x^a \exp(-x) \leq cx^N x^{-(N+1)} = c/x \to 0 \qquad (x \to \infty),$$

woraus mit dem Sandwich-Lemma $\lim_{x\to\infty} x^a \exp(-x) = 0$ folgt. Die Funktion aus der Aufgabenstellung ist also konstant 0.

2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann können wir die Existenz von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (Grenzwert der Funktion f für $x \to \infty$) und $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (Grenzwert der Folge $(f(n))_n$) untersuchen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$, so existiert auch $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

Aus der Existenz von $a := \lim_{x\to\infty} f(x)$ folgt, dass es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$ gibt mit $|f(x)-a| < \varepsilon$ für $x > K$. Insbesondere gilt $|f(n)-a| < \varepsilon$ für $n \geq N := \lceil K \rceil \in \mathbb{N}$, also $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$.

(b) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

(c) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f stetig, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

Ein Gegenbeispiel für (c) (und somit auch für (b)) lautet wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} -n^2 + nx, & x \in [n, n+1/2],\ n \in \mathbb{Z}, \\ n^2 + n - nx, & x \in [n+1/2, n+1],\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dann ist f wohldefiniert, stetig und es gelten $f(n) = 0$ und $f(n+1/2) = n/2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ und dass der Limes $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht existiert.

√ (d) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f monoton, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

O.B.d.A. sei f monoton wachsend. Setze $a := \lim_{n\to\infty} f(n)$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < f(n) \leq a$ für $n \geq N$. Die Monotonie von f impliziert nun für $x > N$ die Ungleichungskette

$$a - \varepsilon < f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lceil x \rceil) \leq a.$$

Es gilt also $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x > N$, und somit $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

3. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen der folgenden Fälle folgt die Stetigkeit von f in x_0?

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert

Gegenbeispiel: $D = [0,1]$, $x_0 = 0$, f die charakteristische Funktion der Menge $\{0\}$. Dann ist f unstetig in x_0, aber $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ existiert.

√ (b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

√ (c) x_0 ist links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D und f ist in x_0 links- und rechtsseitig stetig

Gültigkeit von (b) und (c) folgt unmittelbar aus den Definitionen.

√ (d) x_0 ist kein rechtsseitiger Häufungspunkt von D und es gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Es ist nur zu bemerken, dass „x_0 kein rechtsseitiger Häufungspunkt von D“ bedeutet, dass für hinreichend kleines $\delta > 0$ die Gleichung $D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = D \cap (x_0 - \delta, x_0]$ gilt. Damit folgt auch diese Aussage direkt aus den Definitionen.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ist das Folgende ein korrekter Beweis der Aussage, dass jede Funktion $f \in C([a,b])$ beschränkt ist?

Angenommen f wäre nicht beschränkt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$. Wähle eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ mit Grenzwert $x_0 \in [a,b]$. Es folgt $|f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \geq \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, ein Widerspruch.

√ (a) Ja.

(b) Nein.

5. Welche der folgenden Mengen sind Filter auf $\mathbb{R}$?

(a) $\mathcal{F}_1 = \{F \subset \mathbb{R} \mid F \text{ oder } \mathbb{R} \setminus F \text{ abzählbar}\}$

Die erste definierende Eigenschaft eines Filters ist verletzt: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{F}_1$.

√ (b) $\mathcal{F}_2 = \{F \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus F \text{ abzählbar}\}$

Alle Eigenschaften eines Filters sind erfüllt, da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

(c) $\mathcal{F}_3 = \{F \subset \mathbb{R} \mid 0 \in F \vee 1 \in F\}$

Die zweite definierende Eigenschaft eines Filters ist verletzt: $\{0\}, \{1\} \in \mathcal{F}_3$ aber $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset \notin \mathcal{F}_3$.

(d) $\mathcal{F}_4 = \{\{n, n+1, n+2, \dots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Jeder Filter auf $\mathbb{R}$ enthält aufgrund der dritten definierenden Eigenschaft eines Filters die Menge $\mathbb{R}$ selbst. Dies ist hier nicht der Fall.

√ (e) $\mathcal{F}_5 = \{F \subset \mathbb{R} \mid F \text{ ist Umgebung jeder rationalen Zahl}\}$

Alle Eigenschaften eines Filters können direkt nachgeprüft werden. Zusatzaufgabe: Überzeugen Sie sich davon, dass $\mathcal{F}_5$ nicht ausschliesslich die Menge $\mathbb{R}$ enthält.

6. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Welche Aussagen über den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$$

sind im Allgemeinen korrekt?

√ (a) Ist $a > 0$, so existiert der Grenzwert und er ist a^b.

Dies folgt aus der Definition $a_n^{b_n} = \exp(b_n \log(a_n))$, Stetigkeit von log auf $\mathbb{R}_{>0}$ und Stetigkeit von exp auf $\mathbb{R}$.

√ (b) Ist $a = 0$ und $b > 0$, so existiert der Grenzwert und er ist 0.

Aus $a = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \log(a_n) = -\infty$, und zusammen mit $b > 0$ ergibt dies auch $\lim_{n\to\infty} b_n \log(a_n) = -\infty$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(b_n \log(a_n)) = 0$.

(c) Ist $a = b = 0$, so existiert der Grenzwert und er ist $0^0 = 1$.

In diesem Fall muss der Grenzwert nicht existieren. Beispiel:

$$a_n = \begin{cases} \exp(-n), & n \text{ gerade,} \\ \exp(-n^2), & n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad b_n := \frac{1}{n}.$$

Dann gilt $a = b = 0$ und

$$a_n^{b_n} = \begin{cases} \exp(-1), & n \text{ gerade,} \\ \exp(-n), & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Teilfolge von $(a_n^{b_n})_n$ mit geraden Indizes konvergiert also gegen $\exp(-1) \neq 0$, diejenige mit ungeraden Indizes jedoch gegen 0. Die gesamte Folge ist also nicht konvergent.