D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis I HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

MC-Aufgaben Übungsblatt 2

Einsendeschluss: Freitag, 6. Oktober 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Seien X, Y Mengen und $A, A' \subset X$ sowie $B, B' \subset Y$ Teilmengen. Sei weiters $*$ eine Mengenoperation. In welchen Fällen gilt

$$(A * A') \times (B * B') = (A \times B) * (A' \times B')?$$

√ (a) $* = \cap$

Sowohl $(x, y) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$ als auch $(x, y) \in (A \times B) \cap (A' \times B')$ sind per Definition äquivalent zu $x \in A \wedge x \in A' \wedge y \in B \wedge y \in B'$.

(b) $* = \cup$

Gegenbeispiel: $X = Y = \{0, 1\}$, $A = B = \{0\}$, $A' = B' = \{1\}$.

(c) $* = \setminus$

Gegenbeispiel: $X = Y = \{0, 1\}$, $A = B = \{0, 1\}$, $A' = B' = \{1\}$.

(d) $* = \triangle$, wobei die *symmetrische Differenz* $C \triangle D$ zweier Mengen $C, D \subset Z$ per Definition aus genau den Elementen von Z besteht, die in genau einer der Mengen C, D enthalten sind.

Gegenbeispiel: $X = Y = \{0, 1\}$, $A = B = \{0\}$, $A' = B' = \{1\}$.

2. Seien X, Y Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $B \subset Y$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr?

√ (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$

Per Definition: Jedes Element von A wird unter f nach $f(A)$ abgebildet.

(b) $A \supset f^{-1}(f(A))$

Gegenbeispiel: $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1\}$, $f\colon x \mapsto x^2$, $A = \{0, 1\}$. Die Aussage gilt aber, falls f injektiv ist.

(c) $B \subset f(f^{-1}(B))$

Gegenbeispiel: $X = \{0\}$, $Y = \{0, 1\}$, $f\colon 0 \mapsto 0$, $B = \{0, 1\}$. Die Aussage gilt aber, falls f surjektiv ist.

√ (d) $B \supset f(f^{-1}(B))$

Per Definition: Jedes Element von $f^{-1}(B)$ wird unter f nach B abgebildet.

3. Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Welche der folgenden Schlüsse gelten allgemein?

(a) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist f surjektiv.

Gegenbeispiel: $X = Y = \{0, 1\}$, $Z = \{0\}$, $f\colon x \mapsto 0$, $g\colon y \mapsto 0$.

(b) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.

Gegenbeispiel: $X = Z = \{0\}$, $Y = \{0, 1\}$, $f\colon x \mapsto 0$, $g\colon y \mapsto 0$.

√ (c) Wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt, dann ist f injektiv.

Angenommen f ist nicht injektiv. Dann gibt es $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ und $f(x) = f(x')$. Dann gilt für $A = \{x\}$, dass $A \subsetneq \{x, x'\} \subset f^{-1}(f(A))$, ein Widerspruch.

√ (d) Wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt, dann ist f surjektiv.

Sei $y \in Y$. Für $B = \{y\}$ wissen wir dann, dass $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ gilt. Insbesondere ist $f^{-1}(\{y\})$ nichtleer. Für $x \in f^{-1}(\{y\})$ gilt per Definition $f(x) = y$, was die Surjektivität von f beweist.

4. In dieser Aufgabe behaupten wir fälschlicherweise, dass jede symmetrische und transitive Relation $\sim$ auf einer Menge X auch reflexiv (und damit eine Äquivalenzrelation) ist. Welche Zeilen des folgenden Beweises sind fehlerhaft?

$\checkmark$ (a) Sei $x \in X$ ein beliebiges Element. Sei $y \in X$, so dass $x \sim y$.

Diese Zeile ist falsch: Ein solches y muss nicht existieren. (Keine Bedingung besagt, dass x mit irgendeinem Element in Relation stehen muss.)

(b) Wegen Symmetrie der Relation gilt also auch $y \sim x$.

(c) Aus der Transitivität von $\sim$ folgt die Implikation $(x \sim y) \wedge (y \sim x) \implies x \sim x$.

(d) Zusammen mit dem zuvor Festgestellten folgt daraus $x \sim x$, was zu zeigen war.

Die Folgerungen in den übrigen Zeilen sind korrekt.

5. Seien A, B endliche Teilmengen einer Menge X. Welche der folgenden Formeln sind richtig?

(a) $|A \cup B| = |A| + |B|$

Gegenbeispiel: $X = A = B = \{0\}$. Es gilt aber stets „$\leq$“, mit Gleichheit genau dann wenn A und B disjunkt sind.

(b) $|A \cap B| = \min\{|A|, |B|\}$

Gegenbeispiel: $X = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. Es gilt aber stets „$\leq$“, mit Gleichheit genau dann wenn $A \subset B$ oder $B \subset A$.

$\checkmark$ (c) $|A \times B| = |A||B|$

$\checkmark$ (d) $|B^A| = |B|^{|A|}$, falls $A, B \neq \emptyset$

Der formale Beweis der letzteren beiden Aussagen erfolgt mittels vollständiger Induktion über $n = |A|$.

6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das Schubfachprinzip besagt, dass eine Abbildung von einer Menge mit mehr als n Elementen nach $\{1, \ldots, n\}$ nicht injektiv sein kann. Was folgt daraus?

(a) Werden 91 Briefe auf 13 Postfächer verteilt, so enthält zumindest ein Postfach 8 Briefe.

$7 \cdot 13 = 91$

√ (b) Werden $(n+1)!$ Briefe auf 2^n Postfächer verteilt, so enthält zumindest ein Postfach n Briefe.

Man verifiziert, dass $(n+1)! > (n-1)2^n$ gilt. Somit ist die Verteilung nicht möglich, wenn jedes Fach höchstens $n-1$ Briefe enthält.

√ (c) Eine Abbildung $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ kann nicht surjektiv sein.

Sonst gäbe es nach Aufgabe 3. der Serie 2 der Linearen Algebra auch eine injektive Abbildung $\{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n\}$.

√ (d) Sind $x_1, \ldots, x_{n+1}$ paarweise verschiedene Punkte im Intervall $[0, 1]$, so gibt es $1 \leq j < k \leq n+1$ mit $|x_j - x_k| \leq 1/n$.

Unterteile $[0, 1]$ in die n Teilintervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $1 \leq i \leq n$. In zumindest einem dieser Intervalle liegt dann mehr als einer der Punkte x_i.