MC-Aufgaben Übungsblatt 13

Einsendeschluss: Freitag, 22. Dezember 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Die Differentialgleichung

$$y'' + 2\sin(x)y' + y = x^2$$

ist...

(a) ...homogen und linear.

√ (b) ...inhomogen und linear.

(c) ...homogen und nicht linear.

(d) ...inhomogen und nicht linear.

Die Differentialgleichung ist linear, da die linke Seite (als Funktion von x) linear von y abhängt. (Der von x abhängige Koeffizient $\sin(x)$ von y' spielt dabei keine Rolle. Nicht linear ist die Differentialgleichung nur dann, wenn y oder eine der Ableitungen in nicht linearer Form vorkommt, also z.B. ein Term $\exp(y)$ oder $(y')^2$ etc.) Sie ist inhomogen aufgrund der Störfunktion x^2 auf der rechten Seite.

2. Für eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^\times$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(U)$ die Menge der reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = 0$$

auf U. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

√ (a) Ist $I \subset \mathbb{R}^\times$ ein nichtleeres, offenes Intervall, so ist $\mathcal{L}(I)$ ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Die Funktion $f \colon x \mapsto -\left(\frac{4}{x}+1\right)$ besitzt auf I die Stammfunktion $F \colon x \mapsto -(4 \log |x| + x)$. Lemma 7.60 impliziert nun die Aussage.

√ (b) Ist $I = \mathbb{R}_{>0}$ oder $I = \mathbb{R}_{<0}$, so gilt für jedes $y \in \mathcal{L}(I)$

$$\lim_{x \to 0} y(x) = \lim_{x \to 0} y'(x) = 0.$$

Nach Lemma 7.60 ist y von der Form $y : x \mapsto c \exp(4 \log |x| + x) = cx^4 \exp(x)$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich die Aussage.

(c) Die Menge $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ ist ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ besteht genau aus den Funktionen der Form

$$y \colon x \mapsto \begin{cases} c_1 x^4 \exp(x), & x > 0, \\ c_2 x^4 \exp(x), & x < 0 \end{cases}$$

für beliebige Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Demnach ist $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ zweidimensional.

√ (d) Jede Funktion $y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ besitzt eine stetig differenzierbare Fortsetzung $\bar{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Nach (b) wird y durch den Wert $\bar{y}(0) := 0$ stetig in 0 fortgesetzt. Für die Differenzierbarkeit von $\bar{y}$ in 0 bemerke, dass nach dem Mittelwertsatz $\frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(0)}{x} = y'(\xi)$ für ein $\xi \neq 0$ zwischen x und 0 gilt und verwende erneut (b), um $\bar{y}'(0) = 0$ zu finden. Die Fortsetzung $\bar{y}$ ist damit stetig differenzierbar.

(e) Jede Funktion $y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\times)$ besitzt eine glatte Fortsetzung $\bar{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Gegenbeispiel: Sei y die Funktion aus (c) mit $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$. Durch Nachrechnen findet man, dass die Fortsetzung $\bar{y}$ aus (d) in $C^3(\mathbb{R})$ liegt, aber dass für die dritte Ableitung $f := \bar{y}^{(3)}$ die einseitigen Ableitungen in 0

$$f'_+(0) = 24 \neq 0 = f'_-(0)$$

erfüllen. Somit ist $\bar{y}$ nicht 4-mal differenzierbar.

3. Welche der folgenden Ansätze sind zum Bestimmen einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \cos(x)$$

zielführend?

(a) $y = c\mathrm{e}^x \cos(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

(b) $y = cx\mathrm{e}^x \cos(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

√ (c) $y = c_1 x\mathrm{e}^x \cos(x) + c_2 x\mathrm{e}^x \sin(x)$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y = c_1 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + c_2 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

√ (e) $y = c_1 x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + c_2 x\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Die Störfunktion kann geschrieben werden als

$$\mathrm{e}^x \cos(x) = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\big).$$

Gemäss der Diskussion in Abschnitt 7.5.4 des Skripts müssen wir als Ansatz also eine Linearkombination der Ansätze für die Störfunktionen $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ und $\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$ wählen. Da $1 \pm \mathrm{i}$ einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung sind, müssen wir dafür die Exponentialfunktionen mit den korrekten Exponenten noch mit x multiplizieren. Wir erhalten also als Ansatz

$$y = c_1 x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + c_2 x\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Da $x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ und $x\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}$ zusammen denselben Raum komplexer Funktionen aufspannen wie $x\mathrm{e}^x \cos(x)$ und $x\mathrm{e}^x \sin(x)$, ist auch der Ansatz

$$y = \tilde{c_1} x\mathrm{e}^x \cos(x) + \tilde{c_2} x\mathrm{e}^x \sin(x)$$

für (natürlich andere) Konstanten $\tilde{c_1}, \tilde{c_2} \in \mathbb{C}$ zielführend. Da mit y auch $\mathrm{Re}(y)$ eine partikuläre Lösung ist, können wir sogar $\tilde{c_1}, \tilde{c_2} \in \mathbb{R}$ erreichen.

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist I kompakt und f Riemann-integrierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

Gegenbeispiel: $I = [-1, 1]$, $f(x) = 0$ für $x \leq 0$, $f(x) = 1$ für $x > 0$. Dann kann f nach Aufgabe 5 der Serie 12 keine Stammfunktion besitzen.

√ (b) Ist f stetig, so besitzt f eine Stammfunktion.

Ist $a \in I$, so zeigt der Beweis von Theorem 8.2, dass

$$F\colon I \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f ist. (Dabei ist gemäss Konvention $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ falls $x < a$.) Man bemerke dafür nur, dass für das orientierte Integral die Intervalladditivität aus Satz 4.26 unabhängig von der Anordnung von $a, b, c \in I$ gilt (vgl. Übung 4.27).

√ (c) Ist f differenzierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

Differenzierbare Funktionen sind stetig.

(d) Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f differenzierbar.

(e) Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f stetig.

Beispiel 7.20 belegt, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht stetig zu sein braucht. Dies widerlegt (d) und (e).

(f) Besitzt f eine Stammfunktion und ist I kompakt, so ist f Riemann-integrierbar.

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion auf einem kompakten Intervall muss nicht beschränkt sein, siehe wiederum Beispiel 7.20.

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \begin{cases} 1/n, & n \equiv 1 \text{ oder } 2 \mod 4, \\ -1/n, & n \equiv 0 \text{ oder } 3 \mod 4. \end{cases}$$

Was ist der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(a) $\pi/4 + \log(2)$

(b) $\pi/2 - \log(2)$

√ (c) $\pi/4 + \log(2)/2$

(d) $\pi/8 - 2\log(2)$

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}.$$

(Siehe Abschnitte 8.1.2 und 8.1.3 im Skript.)