MC-Aufgaben Übungsblatt 3

Einsendeschluss: Freitag, 13. Oktober 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Sei K ein angeordneter Körper und $x, y, z \in K$ mit $z \geq 0$. Welche der folgenden Implikationen sind im Allgemeinen richtig?

(a) $xz \leq yz \implies x \leq y$

Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$, $x = 1$, $y = z = 0$. Die Implikation stimmt allerdings, wenn $z > 0$.

√ (b) $xz < yz \implies x < y$

Wenn $xz < yz$ gilt, dann kann nicht $z = 0$ gelten. Man kann also die Kürzungsregel (Aufgabe 2.b)) anwenden. Zusätzlich bemerkt man, dass nicht $x = y$ gelten kann, wenn $xz < yz$ gilt.

(c) $x^2 \leq y^2 \implies x \leq y$

Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$, $x = 1$, $y = -1$.

(d) $x \leq y \implies x^2 \leq y^2$

Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$, $x = -2$, $y = 1$.

√ (e) $0 \leq x < y \implies x^2 < y^2$

Zweimaliges Anwenden der Folgerung (t) ergibt $x^2 =\leq xy \leq y^2$. Wäre $x^2 = y^2$, so folgt aus der vorigen Ungleichung $xy = y^2$. Da $y > 0$ ist, könnte man kürzen und würde $x = y$ erhalten.

2. Sei X eine Menge mit $|X| \geq 2$. Die Relation $\subset$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist...

(a) ...eine Äquivalenzrelation.

Da X nichtleer ist, gelten für $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$ die Relationen $\emptyset \subset X$ und $X \not\subset \emptyset$. Also ist $\subset$ nicht symmetrisch.

(b) ...eine lineare Ordnungsrelation.

Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gilt weder $\{x\} \subset \{y\}$ noch $\{y\} \subset \{x\}$.

$\surd$ (c) ...eine Ordnungsrelation, die nicht linear ist.

(d) ...keins der Obigen.

Die Relation $\subset$ ist reflexiv, da für $A \in \mathcal{P}(X)$ stets $A \subset A$ gilt; sie ist transitiv, da für $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ aus $A \subset B$ und $B \subset C$ auch $A \subset C$ folgt; und sie ist antisymmetrisch, da für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \subset B$ und $B \subset A$ schon $A = B$ gilt. Warum $\subset$ keine lineare Ordnung ist, wird im Feedback zu (b) erklärt.

3. Es bezeichne $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit. Welche der folgenden Formeln sind richtig?

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^4 = 1$

$\surd$ (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^4 = -1$

$\surd$ (c) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = 1$

(d) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = -1$

4. Sei $X \subset \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ ein *Maximum* von X ist, falls $x_0 \in X$ und $x \leq x_0$ für alle $x \in X$ gilt. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen ein Maximum?

(a) $X_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Wäre x_0 ein Maximum von X_1, so wäre $x_0/2 \in X_1$ und $x_0/2 > x_0$, was der Maximalität von x_0 widerspräche.

(b) $X_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$

Es funktioniert das gleiche Argument wie für (a).

$\surd$ (c) $X_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$

$x_0 = -1$ ist ein Maximum.

(d) Keine der obigen Mengen.

5. Betrachte die Menge

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; x + \frac{8}{x} + 6 \geq 0 \right\}.$$

Welche der folgenden Mengen ist gleich X?

(a) $(0, \infty) \cup [-8, -6]$

√ (b) $(0, \infty) \cup [-4, -2]$

(c) $(0, \infty) \cup (-4, -2)$

(d) $(-\infty, -4] \cup [-2, \infty)$

(e) $(-\infty, -4] \cup [-2, 0) \cup (0, \infty)$

(f) Keine.

Die wichtige Beobachtung ist, dass man die Fälle $x > 0$ und $x < 0$ getrennt betrachten muss, da sich in letzterem Fall bei Multiplikation mit x die Richtung der Ungleichung ändert.

- Für $x > 0$ ist stets $x + \frac{8}{x} + 6 \geq 0$ (Summe nichtnegativer Zahlen ist nichtnegativ).
- Für $x < 0$ multiplizieren wir die Ungleichung mit x. Dies führt die gegebene Ungleichung $x + \frac{8}{x} + 6 \geq 0$ in die äquivalente Ungleichung $x^2 + 6x + 8 \leq 0$ über. Nun ist aber $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$, was genau für $x \in [-4, -2]$ kleiner oder gleich 0 ist.

6. Welche der folgenden Beispiele sind Körper, die angeordnet werden können?

(a) $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ ist kein Körper, denn 1 besitzt z.B. kein Inverses bezüglich Addition.

(b) $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ ist kein Körper, denn 2 besitzt z.B. kein Inverses bezüglich Multiplikation.

$\surd$ (c) $\mathbb{Q}$

$\surd$ (d) $\mathbb{R}$

(e) $\mathbb{C}$

In jedem angeordneten Körper gelten $0 < 1$ (Folgerung (s)), also $-1 < 0$ (Folgerung (q)). Weiters ist $x^2 > 0$, falls $x \neq 0$ (Folgerung (r)). In $\mathbb{C}$ gilt aber $i^2 = -1$, ein Widerspruch wenn es eine Anordnung gäbe.

(f) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \geq 2$ (siehe Serie 2, Lineare Algebra) mit Addition und Multiplikation modulo n

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist kein Körper wenn n keine Primzahl ist. In der Tat ist in diesem Fall stets Folgerung (i) verletzt. (Wieso?)

(g) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p

Zwar ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hier ein Körper, aber dieser kann nicht angeordnet werden. Denn bezeichnet $[n]$ die Restklasse von $n \in \mathbb{Z}$, dann würde in diesem Fall gelten, dass $[1] > [0]$ (Folgerung (s)). Induktives Anwenden von Axiom (14) ergibt dann

$$[n] = \underbrace{[1] + \cdots + [1]}_{n \text{ mal}} > [0]$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, was wegen $[p] = [0]$ nicht möglich ist.