MC-Aufgaben Übungsblatt 5

Einsendeschluss: Freitag, 27. Oktober 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur Aussage, dass x_0 ein Häufungspunkt von A ist?

(a) $\forall \varepsilon > 0\, \exists! a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

Es existieren sogar stets unendlich viele solche $a \in A$, wenn x_0 ein Häufungspunkt von A ist.

√ (b) $\forall \varepsilon > 0\, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

Dies ist die Definition eines Häufungspunkts von A (siehe Definition 2.73 im Skript).

√ (c) $\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

Es reicht, die Definition für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ zu überprüfen. Denn dann gilt sie a forteriori für jedes $\varepsilon > 0$.

(d) $\forall \varepsilon > 1\, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

Es reicht nicht, die Definition nur für $\varepsilon > 1$ zu überprüfen. (Ansonsten wäre z.B. 0 ein Häufungspunkt von $[1, 2]$.)

2. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Wie viele Summanden kommen in der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ vor?

(a) $n - m - 1$

(b) $n - m$

√ (c) $n - m + 1$

Man betrachtet am besten ein Beispiel: Für $m = 1$ müssen es n Summanden sein, und dies ist nur mit einer der Antwortmöglichkeiten konsistent. (Formal würde man die Antwort natürlich mit Induktion beweisen.)

3. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Welche der folgenden Ausdrücke stimmen stets mit der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ überein?

$\surd$ (a) $\sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

(b) $\sum_{j=1}^{n-m} a_{n+1-j}$

$\surd$ (c) $\sum_{k=0}^{n-m} a_{m+k}$

$\surd$ (d) $\sum_{l=0}^{n-m} a_{n-l}$

Die korrekten Antworten entstehen aus der gegebenen Summe durch Umbenennen des Summationsindex, Indexverschiebungen und Umkehrungen der Summationsreihenfolge. In der Praxis überlegt man sich meist einfach, ob in der neuen Summe dieselben Zahlen als Index auftreten wie in der alten Summe: z.B. laufen die Indizes in (a) von $m + n - m = n$ (für $i = m$) bis $m + n - n = m$ (für $i = n$). Dies sind dieselben Indizes wie in der Ausgangssumme (nur in anderer Reihenfolge). In (b) hingegen laufen die Indizes von $n + 1 - 1 = n$ (für $j = 1$) bis $n + 1 - (n - m) = m + 1$ (für $j = n - m$). Es fehlt in also der Summand a_m.

4. In der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

für n komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt Gleichheit genau dann wenn die Summanden $a_1, \ldots, a_n \ldots$

(a) ... alle dasselbe Vorzeichen haben.

Dies wäre das korrekte Kriterium in $\mathbb{R}$.

(b) ... über $\mathbb{R}$ linear abhängig sind.

Gegenbeispiel: $n = 2$, $z = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. Dann sind a_1, a_2 linear abhängig über $\mathbb{R}$ aber $|a_1 + a_2| = 0 < 2 = |a_1| + |a_2|$.

(c) ... auf einer Geraden $\mathbb{R}z := \{rz \mid r \in \mathbb{R}\}$ mit $z \in \mathbb{C}^\times$ liegen.

Es funktioniert dasselbe Gegenbeispiel wie in (b).

√ (d) ... auf einem Strahl $\mathbb{R}_{\geq 0}z := \{rz \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ mit $z \in \mathbb{C}^\times$ liegen.

Liegen $a_1, \ldots, a_n$ auf dem Strahl $\mathbb{R}_{\geq 0}z$, $z \in \mathbb{C}^\times$, so ist jedes a_k, $1 \leq k \leq n$, von der Form $a_k = r_k z$ mit $r_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right) |z| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Dies zeigt, dass das Kriterium hinreichend ist. Dass es auch notwendig ist, ergibt sich für $n = 2$ aus einer Analyse, wann im Beweis der Dreiecksungleichung (siehe Abschnitt 2.4.3 im Skript) Gleichheit eintritt. Die Verallgemeinerung auf beliebige $n \geq 2$ erfolgt dann mittels Induktion.

5. Welche der folgenden Zahlen sind algebraisch? (Vgl. Abschnitt 3.2.3 im Skript.)

√ (a) $z_1 = 1 + \sqrt{2}$

z_1 ist z.B. Nullstelle des Polynoms $f_1 = (T-1)^2 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$.

√ (b) $z_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

z_2 ist z.B. Nullstelle des Polynoms $f_2 = (T^2-1)^2 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$.

√ (c) $z_3 = \mathrm{i} + \sqrt{1+\sqrt{2}}$

z_3 ist z.B. Nullstelle des Polynoms $f_3 = T^8 + 4T^4 + 32T^2 + 4 \in \mathbb{Q}[T]$.

Die algebraischen Zahlen bilden einen Unterkörper von $\mathbb{C}$, daher ist jede Zahl, die man unter Verwendung der Körperoperationen aus algebraischen Zahlen gewinnen kann, selbst algebraisch. Wie Sie vielleicht festgestellt haben, ist das Angeben eines Polynoms, das die resultierende algebraische Zahl als Nullstelle hat, aber nicht immer einfach. Noch schwieriger ist der Nachweis der Transzendenz von Zahlen. Klassische Beispiele sind die *Kreiszahl* π und die *Eulersche Zahl* e, die demnächst formell eingeführt werden.

6. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$. Welche der folgenden Formeln gelten stets?

(a) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Die korrekte Formel lautet $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

√ (b) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

Es gilt

$$\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\,\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

√ (c) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$

Die linke Seite entspricht dem binomischen Lehrsatz nach genau $(1+1)^n$.

(d) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = 2^{n-1}$

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = (1+(-1))^n = 0$.

7. Sei $X = \{(-1)^n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Was ist die Menge der Häufungspunkte von X?

(a) $\{1\}$

(b) $\{-1\}$

(c) $\{(-1)^n\}$

Dies ist ohne Spezifikation, was n ist, keine wohldefinierte Menge.

√ (d) $\{\pm 1\}$

(e) X

Sowohl $\{1/n \mid n \text{ gerade}\}$ als auch $\{1/n \mid n \text{ ungerade}\}$ haben nach dem Archimedischen Prinzip 0 als Infimum. Daher sind ± 1 Häufungspunkte. Im Komplement jeder offenen Menge, die $\{\pm 1\}$ enthält, liegen weiters nur endlich viele Punkte von X. Daher gibt es keine weiteren Häufungspunkte.