MC-Aufgaben Übungsblatt 10

Einsendeschluss: Freitag, 1. Dezember 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Was ist der Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}?$$

√ (a) $-1/3$

(b) $2/3$

(c) 1

(d) 2

Unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen (Beispiel 6.3) erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-1/2)} = -\frac{1}{3}.$$

2. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(\sqrt[3]{n+1})^n}$$

ist. . .

(a) . . . divergent.

√ (b) . . . konvergent.

√ (c) . . . absolut konvergent.

(d) . . . bedingt konvergent.

Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\sqrt[3]{n+1})^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[3]{n+1}} = 0.$$

Nach dem Wurzelkriterium (Korollar 6.30) konvergiert die Reihe also absolut. Nach Proposition 6.28 ist die Reihe damit auch konvergent.

3. Sei $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Falls g stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.

Gegenbeispiel: $f_n(x) = x + 1/n$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Dann gilt $|f_n(x) - f(x)| = 1/n$, also $f_n \to f$ gleichmässig, aber $|g(f_n(x)) - g(f(x))| = |2x/n + 1/n^2|$, was für $n \to \infty$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmässig gegen 0 konvergiert.

√ (b) Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ mit $|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$ für $x, y \in \mathbb{R}$, sowie $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ für $n \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Für solche n und x gilt dann $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$, was die gleichmässige Konvergenz von $g \circ f_n$ gegen $g \circ f$ beweist.

(c) Falls g stetig ist, so konvergiert gf_n gleichmässig gegen gf.

(d) Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert gf_n gleichmässig gegen gf.

Ein Gegenbeispiel für (d) (also auch für (c)) lautet wie folgt: $f_n(x) = 1/n$, $f = 0$, $g(x) = x$. Dann gilt $|f_n(x) - f(x)| = 1/n$, also $f_n \to f$ gleichmässig, aber $|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |x|/n$, was für $n \to \infty$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmässig gegen 0 konvergiert.

4. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und definiere

$$r_n := \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} a_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

√ (a) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch die Folge $(r_n)_n$ konvergent.

Das Cauchy-Kriterium (Satz 6.26) impliziert, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|r_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Die Folge $(r_n)_n$ konvergiert also gegen 0.

(b) Ist die Folge $(r_n)_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Wir geben ein gemeinsames Gegenbeispiel für (b) und (c) an:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = k^2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ -1, & n = k^2 + 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent, da $(a_n)_n$ keine Nullfolge ist, aber $r_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass sowohl die Folge $(r_n)_n$ als auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergieren.

5. Sei I eine abzählbar unendliche Indexmenge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie nicht-negativer reeller Zahlen. Wir wollen

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)},$$

definieren, wobei $\psi\colon \mathbb{N} \to I$ eine beliebige Bijektion ist. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) Diese Definition ist nicht sinnvoll, da der Wert einer Reihe auf die Summationsreihenfolge ankommt. Der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ hängt also von der Wahl von ψ ab.

(b) Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ konvergent ist. Denn dann ist diese Reihe wegen $a_i \geq 0$ auch absolut konvergent und die Summationsreihenfolge spielt keine Rolle, sodass der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ unabhängig von der Wahl von ψ ist.

√ (c) Diese Definition ist stets sinnvoll, da auch im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$ die Summationsreihenfolge keine Rolle spielt.

Aufgrund von Proposition 6.11 ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ entweder konvergent (mit Wert in $\mathbb{R}_{\geq 0}$) oder es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$. Im Fall der Konvergenz spielt die Summationsreihenfolge keine Rolle, wie in (b) richtig argumentiert wird (vgl. Satz 6.35 im Skript). Aber dasselbe gilt im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$: Gäbe es nämlich eine andere Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to I$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} < \infty$, so wäre letztere Reihe absolut konvergent, und damit auch jede ihrer Umordnungen. Aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ ist eine solche Umordnung, also müsste auch diese Reihe absolut konvergent sein, ein Widerspruch. Wir haben also argumentiert, dass der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ in jedem Fall unabhängig von der Wahl von ψ ist. Die obige Definition ergibt also in jedem Fall Sinn.

6. Sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1/n}$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

√ (a) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise.

√ (b) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert gleichmässig.

Punktweise gilt aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n} \to \sqrt{x^2} = |x|$$

für $n \to \infty$ und jedes $x \in \mathbb{R}$. Es gilt aber sogar (aufgrund der Ungleichung $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$)

$$\big|f_n(x) - |x|\big| = \big|\sqrt{x^2 + 1/n} - \sqrt{x^2}\big| \leq \sqrt{1/n},$$

was für $n \to \infty$ gleichmässig gegen 0 konvergiert. Dies beweist die gleichmässige Konvergenz von $(f_n)_n$ gegen die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$.