D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis I HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

MC-Aufgaben Übungsblatt 6

Einsendeschluss: Freitag, 3. November 2017, 8:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0. Gilt die folgende Aussage im Allgemeinen?

$$f(0) \neq 0 \implies (\exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x| < \delta \implies f(x) \neq 0)$$

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Wähle zu $\varepsilon = |f(0)|$ ein $\delta > 0$ wie in der Stetigkeitsdefinition. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < \delta$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f(x)| \geq |f(0)| - |f(x) - f(0)| > |f(0)| - \varepsilon = 0.$$

Es gilt für solche x also $f(x) \neq 0$.

2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt die folgende Aussage im Allgemeinen?

$$(\exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x| < \delta \implies f(x) \neq 0) \implies f(0) \neq 0$$

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Gegenbeispiel: $f\colon x \mapsto x$, $\delta = 1$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < \delta$ stets $f(x) = x \neq 0$, aber trotzdem $f(0) = 0$.

3. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

(a) $V_1 = \{f \in V \mid f \text{ monoton wachsend}\}$

V_1 ist nicht abgeschlossen unter Skalarmultiplikation: $f_1 : x \mapsto x$ liegt in V_1, die Funktion $-f_1 = (-1) \cdot f_1 : x \mapsto -x$ aber nicht.

(b) $V_2 = \{f \in V \mid f \text{ monoton fallend}\}$

V_2 ist nicht abgeschlossen unter Skalarmultiplikation: $f_2 \colon x \mapsto -x$ liegt in V_2, die Funktion $-f_2 = (-1) \cdot f_2 \colon x \mapsto x$ aber nicht.

(c) $V_3 = \{f \in V \mid f \text{ monoton}\}$

V_3 ist nicht abgeschlossen unter Addition: Betrachte

$$f_3 \colon x \mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad g_3 \colon x \mapsto \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Dann ist f_3 monoton wachsend und g_3 monoton fallend. Beide liegen daher in V_3, aber $f_3 + g_3$ ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$, welche nicht in V_3 enthalten ist.

√ (d) Keine dieser Mengen.

4. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $D' \subset D$ eine nichtleere Teilmenge von D und $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Ist f stetig, so ist die Einschränkung $f|_{D'}$ stetig.

In der Stetigkeitsdefinition funktioniert für $f|_{D'}$ im Punkt $x_0 \in D'$ für gegebenes $\varepsilon > 0$ dasselbe δ wie für f.

(b) Ist $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.

Gegenbeispiel: $D = [0, 1]$, $D' = \{1\}$, $f(x) = 0$ für $x \in [0, 1)$, $f(1) = 1$. Dann ist $f|_{D'}$ stetig, aber f ist nicht stetig in $1 \in D'$.

√ (c) Ist D' offen in $\mathbb{R}$ und $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.

Ist $x_0 \in D'$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es aufgrund der Stetigkeit von $f|_{D'}$ ein $\delta' > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $x \in D' \cap (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$. Da D' offen ist, gibt es ausserdem ein $0 < \delta < \delta'$ mit $I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D'$. Dann gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$, was die Stetigkeit von f in x_0 beweist.

5. Definiere $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ und

$$H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

√ (a) $H \circ H$

$H \circ H$ ist die konstante Funktion $x \mapsto 1$.

(b) $H \cdot H$

$H \cdot H = H$ und H ist unstetig in 0.

(c) $F \circ H$

$F \circ H = H$ und H ist unstetig in 0.

√ (d) $H \circ F$

Da $F \geq 0$ gilt, ist $H \circ F$ die konstante Funktion $x \mapsto 1$.

√ (e) $F \circ F$

F ist als Polynomfunktion stetig (Korollar 3.52) und Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig (Proposition 3.53).

(f) Keine der obigen Funktionen.

6. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $f_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2\colon [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. In welchen der folgenden Fälle ist die zusammengesetzte Funktion

$$f\colon [a, c] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b], \\ f_2(x), & x \in (b, c], \end{cases}$$

notwendigerweise stetig?

(a) $f(b) = f_1(b)$

Dies gilt per Definition von f immer. Ein Gegenbeispiel wäre also: $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $f_1 : x \mapsto 0$, $f_2 : x \mapsto 1$.

√ (b) $f(b) = f_2(b)$

Dies ist äquivalent zu $f_1(b) = f_2(b)$, und in diesem Fall ist f stetig. (Siehe Beweis unten.)

√ (c) $f_1(b) = f_2(b)$

(d) In keinem dieser Fälle.

In jedem Punkt $x \in [a, b) \cup (b, c]$ ist f stetig, denn dann stimmt f in einer Umgebung von x mit entweder f_1 oder f_2 überein, und diese Funktionen sind als stetig vorausgesetzt (vgl. MC-Aufgabe 4.(c)). In $x_0 = b$ prüfen wir die Definition der Stetigkeit direkt nach. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von f_1 in b ein $\delta_1 > 0$ mit $|f_1(x) - f_1(b)| < \varepsilon$ für alle $x \in (b - \delta_1, b]$. Weiters gibt es aufgrund der Stetigkeit von f_2 in b ein $\delta_2 > 0$ mit $|f_2(x) - f_2(b)| < \varepsilon$ für $x \in [b, b + \delta_2)$. Setze $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Mit diesem δ gilt dann für jedes $x \in (b - \delta, b + \delta)$, dass $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ ist. (Denn es ist $f(b) = f_1(b) = f_2(b)$ und $f(x)$ ist entweder $f_1(x)$, falls $x \leq b$, oder $f_2(x)$, falls $x > b$.) Somit ist f in allen Punkten von $[a, c]$ als stetig nachgewiesen, und damit per Definition stetig.

7. Sei $D = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ und

$$f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ist f stetig?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Da $\sqrt{2}$ irrational und somit nicht in D enthalten ist, gibt es für jeden Punkt $x_0 \in D$ eine Umgebung, auf der f konstant ist. Also ist f in jedem $x_0 \in D$ stetig (vgl. MC-Aufgabe 4.(c)), und dies bedeutet nach Definition, dass f stetig ist.

Etwas ungenau (aber anschaulicher) könnte man sagen, dass der Punkt $\sqrt{2}$, in dem „f unstetig wäre“, nicht im Definitionsbereich von f liegt, und daher keine Rolle spielt.