Lösung 2

Hinweise

1. Eine Möglichkeit ist, auf diese Forderungen massgeschneiderte Relationen explizit anzugeben. Dies ist aber nicht nötig: Untersuchen Sie einige elementare, wohlbekannte Relationen auf $\mathbb{N}$ auf ihre Eigenschaften.

2. In a) und b) benötigen Sie ausschliesslich die Definitionen von Injektivität und Surjektivität. In c) wenden Sie a) und b) auf geeignete Art an.

3. Für die Surjektivität bzw. das Angeben der Umkehrabbildung betrachten Sie für gegebenes $f \in \{0,1\}^X$ die Menge $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Die Injektivität kann man direkt nachprüfen.

4. Versuchen Sie, die geforderte Eigenschaft $\tilde{f}([x]_\sim) = [f(x)]_{\tilde{\sim}}$ als Definition von $\tilde{f}$ zu verwenden. Achten Sie dabei auf Wohldefiniertheit.

5. Verifizieren Sie in a) die drei Anforderungen an eine Äquivalenzrelation. Für Teil b) analysieren Sie zuerst kleine Schachbretter ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Ab einer bestimmten Grösse kann der Springer alle Felder erreichen. Welche ist dies?

6. Konstruieren Sie in a) die Funktion φ mit Induktion. In b) nehmen Sie an, dass X nicht endlich ist und verwenden Sie a) und die Definition von „überabzählbar" (Definition 1.86 im Skript). Für Teil c) bietet sich wiederholte Anwendung von Theorem 1.74 an, das besagt, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer beliebigen Menge X echt mächtiger ist als die Menge selbst.

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. **a)** Wir bemerken zuerst, dass eine Abbildung $\tilde{f}\colon X/\sim \to Y/\dot{\sim}$ durch die Forderung „$\tilde{f}([x]_\sim) = [f(x)]_{\dot\sim}$ für alle $x \in X$“ eindeutig bestimmt ist (falls sie existiert), da jedes Element von $X/\sim$ von der Form $[x]_\sim$ für ein $x \in X$ ist.

Es bleibt also nur die Existenz einer solchen Abbildung zu zeigen. Wir definieren die Abbildung $\tilde{f}$ wie folgt: Sei $A \in X/\sim$. Dann ist A per Definition eine Äquivalenzklasse für die Relation $\sim$. Insbesondere ist $\emptyset \neq A \subset X$ und für beliebige $x, x' \in A$ gilt $x \sim x'$. Nach Voraussetzung an die Funktion f folgt also auch $f(x)\dot\sim f(x')$ für $x, x' \in A$, was nichts anderes bedeutet als $[f(x)]_{\dot\sim} = [f(x')]_{\dot\sim}$. Das Element $[f(x)]_{\dot\sim} \in Y/\dot\sim$ hängt also nicht von der Wahl von $x \in A$ ab, sondern nur von der Äquivalenzklasse $A \in X/\sim$. Durch die Festsetzung $\tilde{f}(A) := [f(x)]_{\dot\sim}$ für ein beliebiges $x \in A$ erhalten wir also eine Funktion $\tilde{f}\colon X/\sim \to Y/\dot\sim$. Diese hat nach Konstruktion die geforderte Eigenschaft, da wir für $A = [x]_\sim$ mit $x \in X$ stets den Repräsentanten $x \in A = [x]_\sim$ in der Definition verwenden können.

Bemerkungen:

- Das obige Argument für die Existenz wird üblicherweise folgendermassen aufgeschrieben: „Sei $x \in X$. Definiere $\tilde{f}([x]_\sim) := [f(x)]_{\dot\sim}$. Diese Funktion ist wohldefiniert (da für $x' \in [x]_\sim$ nach Definition $x' \sim x$, und damit nach Voraussetzung $f(x)\dot\sim f(x')$, also $[f(x)]_{\dot\sim} = [f(x')]_{\dot\sim}$ gilt) und sie hat klar die gewünschte Eigenschaft.“ Der Unterschied zum obigen Beweis besteht darin, dass hier die Funktion $\tilde{f}$ definiert wird, bevor eigentlich verifiziert wird, dass diese Definition sinnvoll ist. Dies wird erst durch das Begründen der Wohldefiniertheit sichergestellt. Sobald man mit diesem Konzept genügend vertraut ist, ist dies eine zulässige Beweisführung. Formal gesehen ist die Struktur des obigen Beweises aber sauberer. (Sie benötigt auch nicht den Begriff der Wohldefiniertheit, denn es wird argumentiert, dass die Definition sinnvoll ist, bevor sie überhaupt getätigt wird.)
- Es ist oft instruktiv, über Aussagen dieser und ähnlicher Art mittels *kommutativer Diagramme* nachzudenken. In dieser Sprache formuliert lautet die Aussage dieser Teilaufgabe, dass es genau eine Abbildung $\tilde{f}\colon X/\sim \to Y/\dot\sim$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_\sim"'] & Y \arrow[d, "\pi_{\dot\sim}"] \\ X/\sim \arrow[r, "\tilde{f}"] & Y/\dot\sim \end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnen $\pi_\sim\colon X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]_\sim$ und $\pi_{\dot\sim}\colon Y \to Y/\dot\sim$, $y \mapsto [y]_{\dot\sim}$ die sogenannten *kanonischen Projektionen* (oder *Quotientenabbildungen*), und die *Kommutativität* des Diagramms bedeutet, dass die Abbildungen, die man durch Verfolgen der beiden möglichen Wege von X nach $Y/\dot\sim$ erhält, identisch sind.

Siehe nächstes Blatt!

b) Sei $B \in Y/\dot\sim$. Dann ist nach Definition der Quotientenmenge $B = [y]_{\dot\sim}$ für ein $y \in Y$. Ist f nun surjektiv, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, und nach der definierenden Eigenschaft von $\tilde f$ gilt dann $\tilde f([x]_\sim) = [f(x)]_{\dot\sim} = [y]_{\dot\sim} = B$. Damit ist $\tilde f$ surjektiv.

c) Wir behaupten, dass f nicht notwendigerweise surjektiv ist, wenn $\tilde f$ surjektiv ist. Der Nachweis erfolgt durch ein Gegenbeispiel: Seien $X := \{0\}, Y := \{0, 1\}$ und $f\colon X \to Y$, $0 \mapsto 0$. Weiters definieren wir die Relationen $\sim := X^2$ und $\dot\sim := Y^2$ (in anderen Worten: je zwei beliebige Elemente von X oder Y stehen in Relation, d.h. es gilt $0 \sim 0$ und $y \dot\sim y'$ für $y, y' \in Y$). Dann erfüllt f die Bedingung aus der Aufgabenstellung. Die Quotientenmengen sind gegeben durch $X/\sim = \{X\}$ und $Y/\dot\sim = \{Y\}$. Die Abbildung $\tilde f$ zwischen diesen einelementigen Quotientenmengen bildet also einfach X auf Y ab; $\tilde f$ ist somit surjektiv. Allerdings ist $1 \notin f(X)$—f selbst ist also nicht surjektiv.

5. **a)** Wir müssen die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) überprüfen.

Reflexivität: Sei $a \in X_n$. Ausgehend von Feld a kann der Springer Feld a erreichen, indem er keinen Zug ausführt. Also gilt $a \sim a$.

Symmetrie: Seien $a, b \in X_n$ mit $a \sim b$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}_0$ und eine endliche Abfolge von Feldern $a = a_0, a_1, \ldots, a_m = b$, so dass für jedes $1 \leq i \leq m$ der Zug von a_{i-1} nach a_i ein legaler Zug für einen Springer ist. Dann ist aber auch der Zug von a_i nach a_{i-1} legal. Somit erreicht ein Springer über die Feldabfolge $b = a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0 = a$ das Feld a ausgehend von b. Somit gilt $b \sim a$.

Transitivität: Seien $a, b, c \in X_n$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}_0$ und endliche Abfolgen von Feldern $a = a_0, a_1, \ldots, a_m = b$ und $b = b_0, \ldots, b_n = c$, so dass für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ die Züge von a_{i-1} nach a_i und von b_{j-1} nach b_j legal sind. Definiere nun $a_{m+j} := b_j$ für $1 \leq j \leq n$. Dann ist $a = a_0, \ldots, a_{m+n} = c$ eine legale Zugabfolge von a nach c, und es folgt $a \sim c$.

b) Für $n = 1$ und $n = 2$ kann sich der Springer nicht bewegen. Somit bildet jedes Feld eine eigene Äquivalenzklasse, d.h. es gilt in diesen Fällen

$$X_n/\sim = \{\{a\} \mid a \in X_n\}.$$

Sei nun $n = 3$. Vom mittleren Feld $m \in X_3$ ausgehend kann sich der Springer nicht bewegen, daher ist sicherlich $\{m\} \in X_3/\sim$. Von jedem Randfeld kann der Springer aber jedes andere Randfeld erreichen. Eine mögliche Zugabfolge ist in Abbildung 1 angegeben. Bezeichnet R also die Menge aller Randfelder von X_3, so gilt

$$X_3/\sim = \{\{m\}, R\}.$$

Bitte wenden!

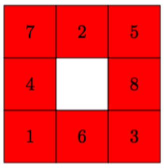

Abbildung 1: Äquivalenzklassen auf einem 3×3-Schachbrett

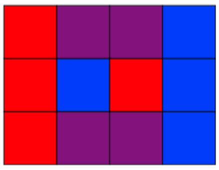

Abbildung 2: Gefärbtes 3×4-Schachbrett

Als nächstes betrachten wir ein 3×4-Schachbrett. Wir bemerken, dass ausgehend von einem der violetten Felder jedes andere Feld erreicht werden kann. In der Tat, unter Verwendung der Eigenschaften des linken 3×3-Bretts sieht man, dass jedes rote und jedes andere violette Feld erreicht werden kann, und durch Betrachten des 3×3-Bretts auf der rechten Seite folgt dasselbe für die blauen Felder. Da $\sim$ nach Teil a) eine Äquivalenzrelation ist, können wir schliessen, dass jedes Feld eines 3×4-Bretts von jedem anderen Feld erreicht werden kann.

Ist nun $n \geq 4$ und sind $a, b \in X_n$ zwei Felder mit einer gemeinsamen Seite, so muss $a \sim b$ gelten, da a, b in einem 3×4-Teilbrett von X_n enthalten sind. Da ausgehend von einem beliebigen Feld jedes andere Feld von X_n durch eine endliche Folge von Schritten in ein Nachbarfeld erreicht werden kann, folgt aus der Transitivität von $\sim$, dass für beliebige $a, b \in X_n$ stets $a \sim b$ gilt. Ganz X_n bildet also die einzige Äquivalenzklasse, d.h. es gilt

$$X_n/\sim \; = \{X_n\}$$

für jedes $n \geq 4$.

6. **a)** Wir konstruieren induktiv Elemente $\varphi(n) \in X$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Elemente $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ paarweise verschieden sind. Für $n = 1$ können wir $\varphi(1)$ frei in X wählen (was möglich ist, da X nichtleer ist). Seien nun die paarweise verschiedenen Elemente $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ schon konstruiert. Da X unendlich ist, ist die Menge $X \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$ nichtleer; ein beliebiges Element dieser Menge nennen wir $\varphi(n+1)$. Dann sind $\varphi(1), \ldots, \varphi(n+1)$ paarweise verschieden, und somit haben wir induktiv die Elemente $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, mit der obigen Eigenschaft konstruiert. Die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto \varphi(n)$$

Siehe nächstes Blatt!

ist dann injektiv, denn ansonsten müsste es $m < n$ geben mit $\varphi(m) = \varphi(n)$, und $\varphi(1), \dots, \varphi(n)$ könnten nicht paarweise verschieden sein.

Bemerkung: Wir mussten in diesem Beweis abzählbar oft eine Wahl treffen. Dass dies ohne weitere Kenntnis der Menge X immer möglich ist, ist nicht ohne Weiteres klar. Wir brauchen dafür das sogenannte *Auswahlaxiom* (bzw. eine abgeschwächte Form davon).

b) Sei X unendlich. Dann müssen wir zeigen, dass X entweder abzählbar unendlich oder überabzählbar ist. Aus Teil a) folgt, dass es eine Injektion $\mathbb{N} \to X$ gibt. In anderen Worten, $\mathbb{N}$ ist schmächtiger als X. Nun hat X aber entweder die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ oder nicht—in ersterem Fall ist X abzählbar unendlich (Definition 1.84), in letzterem überabzählbar (Definition 1.86).

c) Wir halten zu Beginn einige Eigenschaften der Relation[1] $\lesssim$ fest.

- Reflexivität: Für jede Menge X gilt $X \lesssim X$. (Betrachte die Identität $X \to X$.)
- Transitivität: Gilt $X \lesssim Y$ und $Y \lesssim Z$, so folgt $X \lesssim Z$. (Betrachte die Komposition zweier Injektionen $X \to Y$ und $Y \to Z$.)
- Antisymmetrie: Gilt $X \lesssim Y$ und $Y \lesssim X$, so folgt $X \sim Y$. (Satz von Cantor–Schröder–Bernstein.)

Die Idee ist nun zu verwenden, dass keine Menge X die gleiche Mächtigkeit wie ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ haben kann (Theorem 1.74). Durch wiederholtes Bilden von Potenzmengen sollten wir also unendlich viele überabzählbare Kardinalitäten erzeugen können.

Um dies zu formalisieren definieren wir die Abbildung

$$\iota_X \colon X \to \mathcal{P}(X),\ x \mapsto \{x\}.$$

Diese ist injektiv, also gilt $X \lesssim \mathcal{P}(X)$. Definiere weiters $X_0 := \mathbb{N}$ und induktiv $X_n := \mathcal{P}(X_{n-1})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten also die ansteigende Kette von Mächtigkeiten

$$\mathbb{N} = X_0 \lesssim X_1 \lesssim X_2 \lesssim X_3 \lesssim \dots.$$

Unsere Behauptung ist, dass alle X_n mit $n \geq 1$ überabzählbar sind und dass für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ stets $X_m \not\sim X_n$ gilt.

Nehmen wir zuerst an letzteres wäre nicht der Fall. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ und eine Bijektion $\varphi \colon X_n \to X_m$. Die Abbildung

$$\varphi \circ \iota_{X_{n-1}} \circ \dots \circ \iota_{X_{m+1}} \colon \mathcal{P}(X_m) \to X_m$$

[1] Strenggenommen ist $\lesssim$ keine Relation nach der Definition des Skripts, denn ihr Definitionsbereich müsste die „Menge aller Mengen“ sein, welche nicht existiert (vgl. Beispiel 1.27). Es entstehen aber keine Probleme, wenn man den Begriff der Relation auch für Klassen betrachtet. In diesem erweiterten Sinn ist $\lesssim$ also eine Relation auf der Klasse aller Mengen.

Bitte wenden!

ist dann als Komposition injektiver Abbildungen selbst injektiv, und wir erhalten $\mathcal{P}(X_m) \lesssim X_m$. Aus der Antisymmetrie von $\lesssim$ folgt dann aber $X_m \sim \mathcal{P}(X_m)$, im Widerspruch zu Theorem 1.74. Es gilt also tatsächlich $X_m \not\sim X_n$.

Für die Überabzählbarkeit der X_n, $n \geq 1$, reicht es zu beobachten, dass aus der Transitivität von $\lesssim$ und unserer Konstruktion direkt $\mathbb{N} \lesssim X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ folgt, und dass das oben gezeigte für $m = 0$ genau $\mathbb{N} = X_0 \not\sim X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ liefert. Per Definition sind die X_n mit $n \geq 1$ also überabzählbar.

Die Kardinalitäten $|X_n|$, $n \in \mathbb{N}$, sind also alle überabzählbar und paarweise verschieden, und dies ist genau was zu zeigen war.

Bemerkung: Die eingangs festgestellten Eigenschaften von $\lesssim$ sind genau die definierenden Eigenschaften einer *(nicht-strikten) Ordnungsrelation*; ein Begriff, der demnächst in Zusammenhang mit den reellen Zahlen auch in der Vorlesung eingeführt werden wird.