Lösung 3

Hinweise

1. Verwenden Sie in a) für die ersten beiden Gleichungen die Eindeutigkeit des additiven Inversen (Folgerung (b)) und das Distributivgesetz (Axiom (9)). Die 3. Gleichung können Sie aus den ersten beiden herleiten. Für b) verwenden Sie die Eindeutigkeit des multiplikativen Inversen (Folgerung (k)) und Teil a).

2. Folgerung (o) enthält die zu a) analoge Aussage für die Addition. Gehen Sie analog vor. In b) überlegen Sie, welche Folgerung aus den Axiomen das Multiplizieren mit z^{-1} erlaubt.

3. In a) müssen Sie nur ein Körperaxiom oder eine Folgerung aus den Axiomen finden, das/die verletzt ist. Die Überprüfung der Axiome einer linearen Ordnung in b) erfolgt mittels Fallunterscheidungen. Zumindest eines der Axiome (14) und (15) muss weiters verletzt sein, da $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann. Das andere ist jedoch erfüllt.

4. Multiplizieren Sie mit xyz und verwenden Sie die Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ für geeignete Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Zeigen Sie zuerst, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge $\mathcal{P}_{\leq n}(X) := \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid |Y| \leq n\}$ höchstens abzählbar unendlich ist (z.B. indem Sie eine Surjektion von einer abzählbar unendlichen Menge auf $\mathcal{P}_{\leq n}(X)$ angeben).

6. Um in b) zu zeigen, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nicht ordnungsvollständig ist, finden Sie eine reelle Zahl, die nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ enthalten ist. Rufen Sie sich dafür in Erinnerung, wie wir eine Zahl konstruiert haben, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Wir geben zwei Musterlösungen an.

Die erste Lösung beweist die gegebene Ungleichung ausschliesslich unter Verwendung der Axiome der reellen Zahlen und der direkten Folgerungen daraus (siehe Abschnitt 2.1 des Skripts). Sie soll zeigen, wie ein solcher Beweis formal korrekt geführt werden kann.

Die zweite Variante setzt die Eigenschaften der reellen Zahlen als bekannt voraus, was wir nach Abschluss der axiomatischen Einführung von $\mathbb{R}$ immer tun werden (und was Sie dann natürlich auch in Ihren Beweisen tun dürfen). Insbesondere zeigt die zweite Lösung, wie ein vollständiger Beweis der gegebenen Ungleichung aussehen könnte, wenn sie eine Aufgabe in einer zukünftigen Serie oder Prüfung wäre.

Beweis anhand der Axiome und Folgerungen: Wir bemerken zuerst, dass die gegebene Bedingung $xyz > 0$ wegen des Assoziativgesetzes der Multiplikation (Axiom (7)) wohldefiniert ist: Es macht keinen Unterschied ob der Ausdruck xyz als $x(yz)$ oder $(xy)z$ interpretiert wird. In Kombination mit dem Kommutativgesetz (Axiom (8)) folgt auch $0 < xyz = x(yz) = y(xz) = z(xy)$. Dies impliziert $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$ aufgrund von Folgerung (e). Folgerung (i) lässt dann schliessen, dass auch $xy \neq 0$, $xz \neq 0$ und $yz \neq 0$. Damit ist sichergestellt, dass alle in der Ungleichung auftretenden Terme wohldefiniert sind. Die fehlende Klammerung der auftretenden Summen ist durch das Assoziativgesetz der Addition (Axiom (3)) gerechtfertigt.

Wir setzen nun zuerst die Definition der auftretenden Brüche ein. Die gegebene Ungleichung lautet also

$$x(yz)^{-1} + y(xz)^{-1} + z(xy)^{-1} \geq 1 \cdot x^{-1} + 1 \cdot y^{-1} + 1 \cdot z^{-1}. \tag{1}$$

Das Einselement ist das neutrale Element der Multiplikation (Axiom (5)), daher können wir dieses auf der rechten Seite weglassen. Aufgrund der Kommutativität der Multiplikation (Axiom (8)), Folgerung (t), Folgerung (y) und der Voraussetzung $xyz > 0$ ist Multiplikation der Ungleichung von rechts mit xyz eine Äquivalenzumformung. D.h. (1) ist äquivalent zu

$$\Big(x(yz)^{-1} + y(xz)^{-1} + z(xy)^{-1}\Big)xyz \geq \Big(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}\Big)xyz. \tag{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir wenden nun das Distributivgesetz (Axiom (9)) an[1] und ordnen an mehreren Orten Faktoren gemäss dem Kommutativgesetz der Multiplikation (Axiom (8)) um. Ungleichung (2) ist damit äquivalent zu

$$x(yz)^{-1}(yz)x + y(xz)^{-1}(xz)y + z(xy)^{-1}(xy)z \geq x^{-1}x(yz) + y^{-1}y(xz) + z^{-1}z(xy). \tag{3}$$

Nun wenden wir Axiom (6) (multiplikative Inverse) und dann direkt Axiom (5) (Einselement) an und erhalten, dass (3) äquivalent ist zu

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + xz + xy. \tag{4}$$

Aufgrund von Folgerung (s) ist $1 > 0$. Axiom (14) zeigt weiters $2 := 1 + 1 \geq 0 + 1 = 1$[2], wobei die letzte Gleichheit aus Axiom (1) (Nullelement) folgt. Aus Folgerung (n) erhalten wir also $2 > 0$. Wir wir schon argumentiert haben, ist Multiplikation mit 2 daher eine Äquivalenzumformung. Dies gilt auch für Multiplikation von links. Wir multiplizieren also (4) von links mit 2 und erhalten nach Anwendung des Distributivgesetzes (Axiom (9)) die äquivalente Ungleichung

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2yz + 2xz + 2xy. \tag{5}$$

Wir bemerken als nächstes, dass Addition einer beliebigen Zahl c zu einer Ungleichung $a \leq b$ auch eine Äquivalenzumformung ist. In der Tat, Axiom (14) besagt, dass die Implikation $a \leq b \implies a + c \leq b + c$ gilt, und Anwenden von Axiom (14) auf das additive Inverse $-c$ zeigt, dass auch die Implikation $a + c \leq b + c \implies a \leq b$ gilt (verwende Axiome (1) und (2)).

Diese Feststellung können wir nutzen, um zu Ungleichung (5) das additive Inverse der rechten Seite zu addieren. Nach Axiom (1) und (2) ist (5) damit äquivalent zu

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - (2yz + 2xz + 2xy) \geq 0. \tag{6}$$

Aufgrund unserer Definition der Zahl 2 und des Distributivgesetzes (Axiom (9)) gilt $2x^2 = x^2 + x^2$. Analoges gilt für y und z. Zusammen mit Übung 2.3(ii) im Skript und dem Kommutativgesetz der Addition (Axiom (4)) zeigt dies, dass wir (6) umformen können zu

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0,$$

was nach Übung 2.9 dasselbe ist wie

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0. \tag{7}$$

[1]Strenggenommen: Die Verallgemeinerung des Distributivgesetzes auf drei Summanden, welche durch zweimalige Anwendung von Axiom (9) bewiesen wird.

[2]Beachte, dass wir hier tatsächlich *definieren* müssen, was das Symbol „2“ bedeutet, denn es kommt in den Körperaxiomen nirgends vor.

Bitte wenden!

Folgerung (r) impliziert, dass $(x-y)^2 \geq 0$, $(x-z)^2 \geq 0$ und $(y-z)^2 \geq 0$ gelten. Zweimaliges Anwenden von Folgerung (o) beweist somit, dass die Ungleichung (7) gilt.

Es bleibt nur festzustellen, dass wir in jedem Schritt sorgfältig darauf geachtet haben, nur Äquivalenzumformungen zu machen. Daher folgt aus der Gültigkeit von (7) die Gültigkeit der Ungleichung aus der Aufgabenstellung.

Beweis unter Verwendung der Eigenschaften von $\mathbb{R}$: Da laut Annahme $xyz > 0$ gilt, ist die gegebene Ungleichung nach Multiplikation mit $2xyz$ äquivalent zu

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx.$$

Wir bringen nun alle Terme auf die linke Seite und fassen zu Quadraten zusammen. Dabei erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0,$$

welche sicherlich gilt, da Quadrate reeller Zahlen stets nichtnegativ sind. Da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben, ist die Ungleichung in der Aufgabenstellung also bewiesen.

Schlussbemerkung: Beiden Lösungen liegt das exakt gleiche Argument zugrunde. In der ersten Lösung haben wir dieses pedantisch auf Axiome und Folgerungen daraus zurückgeführt. Wie Sie sehen, ist dies sehr umständlich, weshalb wir dies ab jetzt nie wieder tun werden. Prinzipiell ist es aber aber bei jedem korrekten Beweis möglich, dies zu tun. Die zweite Lösung demonstriert, auf welchem Detailliertheitsniveau wir ab jetzt arbeiten wollen, und auf welches Sie insbesondere beim Ausarbeiten Ihrer Übungslösungen abzielen sollten.

5. Wir beweisen zuerst zwei Fakten.

Fakt 1: Ist X abzählbar unendlich und $\varphi\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung, dann ist Y höchstens abzählbar unendlich (d.h. entweder endlich oder abzählbar unendlich).

Beweis: Aufgabe 3.e) der Serie 2 aus der Linearen Algebra impliziert, dass φ eine Rechtsinverse besitzt, also dass es eine Abbildung $\psi\colon Y \to X$ gibt mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Aufgabe 2.b) der Serie 2 (Analysis) impliziert, dass ψ injektiv ist. Also ist Y schmächtiger als X. Somit ist Y entweder endlich, oder abzählbar unendlich falls Y unendlich ist (nach Aufgabe 6.a), Serie 2, und dem Satz von Cantor–Schröder–Bernstein).

Fakt 2: Sind X_n, $n \in \mathbb{N}$, höchstens abzählbar unendliche Teilmengen einer Menge X, so ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ höchstens abzählbar unendlich.

Siehe nächstes Blatt!

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n \colon \mathbb{N} \to X_n$ eine surjektive Abbildung. (Eine solche existiert, da X_n entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.) Betrachte nun die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{N}^2 \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,\ (m,n) \mapsto \varphi_n(m).$$

Diese ist surjektiv, da jede Abbildung φ_n surjektiv auf X_n ist. Aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^2$ (vgl. Übung 1.85 im Skript) folgt mit Fakt 1 somit die Behauptung.

Wir gehen nun zum eigentlichen Beweis über. Als erstes schreiben wir

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(Dies ist möglich, da X als abzählbar unendlich vorausgesetzt wurde.) Die Idee ist nun zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge $\mathcal{P}_{\leq n}(X) := \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid |Y| \leq n\}$ höchstens abzählbar unendlich ist. Dann folgt unter Verwendung von Fakt 2, dass auch

$$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{P}_{\leq n}(X)$$

höchstens abzählbar unendlich ist. Da $\{\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots\} \subset \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(X)$ die Endlichkeit von $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(X)$ ausschliesst, wäre $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(X)$ dann als abzählbar unendlich nachgewiesen.

Fixiere nun $n \in \mathbb{N}_0$. Dass $\mathcal{P}_{\leq n}(X)$ höchstens abzählbar unendlich ist, folgt aus Fakt 1. In der Tat, betrachte die Abbildung

$$\varphi_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}_{\leq n}(X),\ (m_1, \ldots, m_n) \mapsto \{x_{m_1}, \ldots, x_{m_n}\}.$$

Diese ist klar surjektiv und durch Iteration von Übung 1.85 wissen wir, dass $\mathbb{N}^n$ abzählbar unendlich ist. Somit ist nach Fakt 1 die Menge $\mathcal{P}_{\leq n}(X)$ höchstens abzählbar unendlich. Wie oben argumentiert, schliesst dies den Beweis ab.

6. **a)** Wir weisen zuerst nach, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist.

- Es gelten $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- Seien $a + b\sqrt{2}, a' + b'\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann gelten

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{2}) + (a'+b'\sqrt{2}) &= (a+a') + (b+b')\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\\ (a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) &= (aa'+2bb') + (ab'+ba')\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).\end{aligned}$$

- Sei $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann ist

$$-(a+b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Bitte wenden!

- Sei $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $a+b\sqrt{2} \neq 0$. Wir behaupten, dass auch $a-b\sqrt{2} \neq 0$ gilt. Ansonsten müsste nämlich $b \neq 0$ sein und wir hätten $\sqrt{2} = ab^{-1} \in \mathbb{Q}$, im Widerspruch zu Lemma 2.35. Also können wir schreiben

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Dies zeigt, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$. Es ist evident, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der *kleinste* Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält, reicht es festzustellen, dass jeder Unterkörper L von $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält, aufgrund der Abgeschlossenheit unter Addition und Multiplikation notwendigerweise schon $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ enthält. Also ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in jedem solchen Unterkörper L von $\mathbb{R}$ enhalten, und da $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ selbst schon ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, ist es somit der kleinste mit dieser Eigenschaft.

b) Die Körperaxiome (1)–(9) gelten für die auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ induzierten Operationen $+$ und $\cdot$, da sie in $\mathbb{R}$ gelten und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$ die Elemente 0 und 1 von $\mathbb{R}$ enthält und abgeschlossen ist unter Addition, Multiplikation und (additiver und multiplikativer) Inversenbildung. Aus demselben Grund gelten die Axiome (10)–(15) für die induzierte Ordnung $\leq$. Somit ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $\leq$ ein angeordneter Körper.

Um einzusehen, dass diese Ordnung jedoch nicht vollständig ist, wollen wir zeigen, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Angenommen dies wäre doch der Fall. Dann könnten wir schreiben

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$$

mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$. Quadrieren dieser Gleichung ergibt

$$3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}. \tag{8}$$

Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

1. $\underline{a = 0}$: Dann lautet obige Gleichung $3 = 2b^2$. Schreiben wir $b = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, so müsste also gelten $3q^2 = 2p^2$. Da der Primfaktor 2 in p^2 sicherlich in gerader Vielfachheit auftritt, müsste er in der linken Seite in ungerader Vielfachheit vorkommen. Dies ist aber nicht möglich, da er im Faktor 3 gar nicht und in q^2 in gerader Vielfachheit auftritt[3]. Dies ist ein Widerspruch.
2. $\underline{b = 0}$: Dann ist (8) äquivalent zu $3 = a^2$. Setzen wir $a = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, so erhalten wir $3q^2 = p^2$, was einen Widerspruch diesmal durch Betrachten der Vielfachheit des Primfaktors 3 ergibt.

[3]Für eine Diskussion der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ verweisen wir auf die angeleitete Übung 2.32 in Abschnitt 2.2.4 des Skripts.

Siehe nächstes Blatt!

3. $\underline{a \neq 0 \text{ und } b \neq 0}$: Dann können wir $\sqrt{2}$ aus (8) wie folgt ausdrücken:

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab}.$$

   Da $\sqrt{2}$ aber irrational ist, erhalten wir auch hier einen Widerspruch.

Es muss also tatsächlich $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gelten.

Der Schluss, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nicht ordnungsvollständig ist, verläuft analog zum Argument im Beweis von Lemma 2.35, wo gezeigt wird, dass aus $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ folgt, dass $\mathbb{Q}$ nicht ordnungsvollständig ist.

Dieses Argument basiert auf der Beobachtung, dass im Beweis der Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über die Quadratwurzel nur die Axiome (1)–(16) benötigt werden (siehe Vorlesung bzw. Übung 2.14 im Skript). Wäre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ordnungsvollständig, so würden all diese Axiome auch in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gelten, und somit hätte jedes nichtnegative Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ eine eindeutig bestimmte nichtnegative Quadratwurzel in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Insbesondere gäbe es $c \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $0 \leq c$ und $c^2 = 3$. Dann läge c aber auch in $\mathbb{R}$ und die Eindeutigkeit von $\sqrt{3}$ in $\mathbb{R}$ würde $\sqrt{3} = c \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ implizieren. Dass dies nicht der Fall sein kann, haben wir aber oben schon bewiesen.