D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis I HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 4

Hinweise

1. Zeigen Sie, dass $-\inf X$ die kleinste obere Schranke von $-X$ ist.

2. Dass z_1, z_2 Lösungen sind, kann man durch Einsetzen verifizieren. Um zu beweisen, dass es keine weiteren Lösungen gibt, faktorisieren Sie $z^2 + pz + q$ geeignet (entweder durch Ausnutzen der Kenntnis der Nullstellen z_1, z_2 oder durch quadratisches Ergänzen).

3. Zeigen Sie, dass die rechte Seite der Ungleichung eine obere Schranke für $f(x)+g(x)$, $x \in X$, ist. Für ein Beispiel mit strikter Ungleichung denken Sie an Funktionen f, g, die „abwechselnd“ (also nicht gleichzeitig) grosse Werte annehmen.

4. Es muss in a) überprüft werden, dass $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Unterscheiden Sie dafür die Fälle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R} \setminus A$. In b) ist die Antwort genau eine Menge. Welche?

5. Um eine geometrische Interpretation des Abbildungsverhaltens von σ zu finden, berechnen Sie die Bilder von ausreichend vielen Beispielpunkten. Auch die Formel $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$ kann dabei nützlich sein. Für b) und c) machen Sie sich zuerst klar, welche geometrischen Objekte G_{x_0} und $K_r(1)$ sind. Berechnen Sie dann wieder Bilder von Beispielpunkten, bis Sie eine Vermutung haben, was $\sigma(G_{x_0})$ bzw. $\sigma(K_r(1))$ sein könnte. Beweisen Sie Ihre Vermutung, indem Sie $w := \sigma(z)$ setzen und die definierenden Gleichungen der Menge (in der Variablen z) und des vermuteten Bildes (in der Variablen w) äquivalent ineinander umformen.

6. Betrachten Sie für den Beweis von a) die Menge $\{x \in [a, b] \mid f(x) > x\}$. In b) suchen Sie nach einem Polynom mit rationalen Koeffizienten, das auf einem geeigneten Intervall $[a, b]$ die Voraussetzungen erfüllt und als einzigen Fixpunkt in $[a, b]$ eine irrationale Zahl hat. Setzen Sie es ausserhalb von $[a, b]$ geeignet fort.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. **a)** Wir müssen nach Definition zeigen, dass $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Sei also $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Ist $z \notin \mathbb{R}$, so definieren wir $r := |\operatorname{Im} z|/2$. Dann gilt $r > 0$ und wir behaupten, dass $B_r(z) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. In der Tat, für $z_1 \in B_r(z)$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung und wegen $|w| \geq |\operatorname{Im} w|$

$$|\operatorname{Im} z_1| \geq |\operatorname{Im} z| - |\operatorname{Im}(z - z_1)| \geq 2r - |z - z_1| > 2r - r = r > 0$$

und damit $z_1 \notin \mathbb{R}$. Insbesondere gilt also $B_r(z) \subset \mathbb{C} \setminus A$. Falls $z \in \mathbb{R}$, so verwenden wir, dass $\mathbb{R} \setminus A$ nach Voraussetzung offen ist (da A abgeschlossen ist). Es gibt also ein $r > 0$ mit $(z - r, z + r) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Wir behaupten, dass dann $B_r(z) \subset \mathbb{C} \setminus A$ gilt. Ist nämlich $z_1 \in B_r(z) \setminus \mathbb{R}$, so gilt sicherlich $z_1 \notin A$. Andernfalls ist $z_1 \in B_r(z) \cap \mathbb{R} = (z - r, z + r)$ und damit auch in diesem Fall $z_1 \notin A$ nach Wahl von r.

Wir haben also um jeden beliebigen Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus A$ einen offenen Ball $B_r(z)$ gefunden, der ganz in $\mathbb{C} \setminus A$ enthalten ist, was die Offenheit von $\mathbb{C} \setminus A$ beweist. Somit ist A in $\mathbb{C}$ abgeschlossen.

b) Die leere Menge $\emptyset$ ist in $\mathbb{R}$ als auch in $\mathbb{C}$ offen. Wir behaupten, dass dies die einzige offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft ist. Zum Nachweis sei $O \subset \mathbb{R}$ offen und nichtleer und $x \in O$. Wäre O offen in $\mathbb{C}$, so gäbe es ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset O$. Dann wäre aber insbesondere $x + \frac{r}{2}\mathrm{i} \in B_r(x) \subset O$, im Widerspruch zu $O \subset \mathbb{R}$. Keine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ kann also offen in $\mathbb{C}$ sein.

5. **a)** Die Abbildung σ spiegelt einen Punkt $z \in \mathbb{C}^\times$ zuerst an der reellen Achse und invertiert dann den Betrag der erhaltenen Zahl. Dies sieht man durch Berechnung von Bildern einiger Beispielpunkte, oder anhand der Formel

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(Die Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ entspricht dabei dem Spiegeln an der reellen Achse, und die Skalierung $\overline{z} \mapsto \overline{z}/|z|^2$ dem Invertieren des Betrags.)

Wir verallgemeinern nun die Notation der Aufgabe und setzen

$$K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0|^2 = r^2\}$$

Siehe nächstes Blatt!

für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist $K_r(z_0)$ genau der Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. (Wegen $|z-1|^2 = (\operatorname{Re} z - 1)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ stimmt diese Definition für $z_0 = 1$ mit der Definition in der Aufgabenstellung überein.)

b) Für $x_0 = 0$ ist $G_{x_0} = G_0$ die imaginäre Achse vereinigt mit $\{\infty\}$. Diese Menge wird von σ auf sich selbst abgebildet (denn $\sigma(\infty) = 0$, $\sigma(0) = \infty$ und für $y \neq 0$ gilt $1/(y\mathrm{i}) = (-1/y)\mathrm{i}$). Es gilt also $\sigma(G_0) = G_0$. Im Fall $x_0 \neq 0$ erhält man durch Berechnen von Bildern von Beispielpunkten die Vermutung, dass $\sigma(G_{x_0})$ ein Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse sein muss. Dessen Schnittpunkte mit der reellen Achse sollten weiters genau $\sigma(\infty) = 0$ und $\sigma(x_0) = 1/x_0$ sein, da σ die Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf sich selbst abbildet. Dies führt zur Vermutung, dass

$$\sigma(G_{x_0}) = K_{1/(2|x_0|)}\left(\frac{1}{2x_0}\right) \tag{1}$$

gilt. In der Tat, der Punkt $\infty \in G_{x_0}$ wird auf $0 \in K_{1/(2|x_0|)}(1/(2x_0))$ abgebildet. Für $z \in \mathbb{C}^\times$ setzen wir $w := \sigma(z) = 1/z$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
w \in K_{1/(2|x_0|)}\left(\frac{1}{2x_0}\right) &\iff \left|w - \frac{1}{2x_0}\right|^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 \\
&\iff \left(w - \frac{1}{2x_0}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{2x_0}\right) = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 \\
&\iff \left(1 - \frac{1}{2x_0} z\right)\left(1 - \frac{1}{2x_0}\overline{z}\right) = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 |z|^2 \\
&\iff 1 - \frac{1}{x_0}\frac{z+\overline{z}}{2} + \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 |z|^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 |z|^2 \\
&\iff \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} = x_0 \\
&\iff z \in G_{x_0},
\end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile verwendet haben, dass

$$\left|w - \frac{1}{2x_0}\right|^2 = \left(w - \frac{1}{2x_0}\right)\overline{\left(w - \frac{1}{2x_0}\right)} = \left(w - \frac{1}{2x_0}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{2x_0}\right)$$

gilt und von der zweiten zur dritten Zeile mit $z\overline{z}$ erweitert haben. Da jedes $w \in \mathbb{C}^\times$ von der Form $w = 1/z = \sigma(z)$ für ein $z \in \mathbb{C}^\times$ ist und $0 \notin G_{x_0}$ ist, beweist die obige Äquivalenz, dass $\sigma(G_{x_0} \cap \mathbb{C}) = K_{1/(2|x_0|)}(1/(2x_0)) \setminus \{0\}$ gilt. Zusammen mit $\sigma(\infty) = 0$ ergibt sich also genau unsere Behauptung (1).

c) Wir betrachten zuerst den Fall $r = 1$. Hier können wir auf Teil b) zurückgreifen. Für $x_0 = 1/2$ lautet der Schluss von b) nämlich genau, dass $\sigma(G_{1/2}) = K_1(1)$

Bitte wenden!

gilt. Da σ eine *Involution* ist (d.h. es gilt $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$), erhalten wir durch Anwenden von σ auf diese Gleichung sofort

$$\sigma(K_1(1)) = G_{1/2}.$$

Sei nun $r \neq 1$. Ähnlich wie in b) erkennt man, dass $\sigma(K_r(1))$ in diesem Fall ein Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse sein muss, dessen Schnittpunkte mit dieser Achse genau die Punkte $\sigma(1+r) = 1/(1+r)$ und $\sigma(1-r) = 1/(1-r)$ sein sollten. Dies führt wieder zur Vermutung

$$\sigma(K_r(1)) = K_{|r|/(1-r^2)}\left(\frac{1}{1-r^2}\right). \tag{2}$$

(Den Mittelpunkt erhält man als Mittelwert von $1/(1+r)$ und $1/(1-r)$ und den Radius als halben Abstand zwischen diesen Zahlen.) Der Beweis erfolgt wieder durch Setzen von $w := \sigma(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C}^\times$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
w \in K_{|r|/(1-r^2)}\left(\frac{1}{1-r^2}\right) &\iff \left|w - \frac{1}{1-r^2}\right|^2 = \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \\
&\iff \left(w - \frac{1}{1-r^2}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \\
&\iff (1-r^2-z)(1-r^2-\overline{z}) = r^2|z|^2 \\
&\iff (1-r^2)^2 - (1-r^2)(z+\overline{z}) + |z|^2 = r^2|z|^2 \\
&\iff 1-r^2-(z+\overline{z}) + |z|^2 = 0 \\
&\iff 1-(z+\overline{z}) + |z|^2 = r^2 \\
&\iff |1-z|^2 = r^2 \\
&\iff z \in K_r(1),
\end{aligned}$$

wobei wir diesmal von der zweiten zur dritten Zeile mit $(1-r^2)^2 z\overline{z}$ erweitert haben. Da 0 und ∞ weder in $K_{|r|/(1-r^2)}(1/(1-r^2))$ noch in $K_r(1)$ enthalten sind und wieder jedes $w \in \mathbb{C}^\times$ als $w = 1/z$ dargestellt werden kann, beweist diese Äquivalenz unsere Behauptung (2).

6. **a)** Für $K = \mathbb{R}$ besitzt f stets einen Fixpunkt. Der Beweis ist ähnlich zum Beweis der Existenz von Wurzeln in $\mathbb{R}$. Betrachte die Menge

$$X := \{x \in [a,b] \mid f(x) > x\}.$$

Dann ist X nichtleer, denn nach Voraussetzung ist $a \in X$. Weiters ist X durch b nach oben beschränkt. Das Supremum $\xi := \sup X$ ist also eine wohldefinierte reelle Zahl in $[a,b]$. Wir behaupten, dass ξ ein Fixpunkt von f sein muss, also dass $f(\xi) = \xi$ gilt. Zum Nachweis reicht es die beiden Fälle $f(\xi) > \xi$ und $f(\xi) < \xi$ ausschliessen.

Siehe nächstes Blatt!

- Falls $f(\xi) > \xi$ gilt, so muss $\xi < b$ sein (da $f(b) < b$). Daher ist
$$\varepsilon := \min\left(b - \xi, \frac{f(\xi) - \xi}{2}\right) > 0.$$
Aus der Monotonie von f zusammen mit $\varepsilon \leq \frac{f(\xi)-\xi}{2}$ erhalten wir dann
$$f(\xi + \varepsilon) \geq f(\xi) \geq \xi + 2\varepsilon > \xi + \varepsilon.$$
Da wir durch die Definition von ε ausserdem $\xi + \varepsilon \leq b$ sichergestellt haben, folgt $\xi + \varepsilon \in X$, im Widerspruch zur Definition von ξ als Supremum von X.
- Im Fall $f(\xi) < \xi$ setzen wir $\varepsilon := \xi - f(\xi) > 0$. Da $\xi = \sup X$ ist, finden wir für dieses ε ein $x \in X$ mit $\xi - \varepsilon \leq x \leq \xi$. Wiederum aufgrund der Monotonie von f folgt dann
$$f(x) \leq f(\xi) = \xi - \varepsilon \leq x,$$
was einen Widerspruch darstellt, da X aus genau den Punkten $x \in [a, b]$ besteht, für die $f(x) > x$ gilt.

Da wir in beiden obigen Fällen einen Widerspruch erhalten haben, muss notwendigerweise $f(\xi) = \xi$ gelten—ξ ist also ein Fixpunkt von f.

b) Wir behaupten, dass die Aussage für $K = \mathbb{Q}$ nicht stimmt, also dass f in diesem Fall keinen Fixpunkt besitzen muss. Ein Gegenbeispiel ist $a = 1$, $b = 2$ und
$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - x^2) + x, & x \in [1, 2], \\ 5/4, & x < 1, \\ 3/2, & x > 2. \end{cases}$$

Diese Funktion f ist wohldefiniert (da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist) und erfüllt alle Voraussetzungen. Dass $f(a) = f(1) = 5/4 > 1 = a$ und $f(b) = f(2) = 3/2 < 2 = b$ gelten, ist klar. Die Monotonie von f steht nur auf dem Intervall $[1, 2]$ in Frage. Durch elementares Umformen sieht man, dass für $x, y \in \mathbb{Q}$ die Äquivalenz
$$\frac{1}{4}(2 - x^2) + x \leq \frac{1}{4}(2 - y^2) + y \iff (y - x)(4 - x - y) \geq 0$$
gilt. Sind nun $x, y \in [1, 2]$ mit $x \leq y$, so ist $y - x \geq 0$ und auch $4 - x - y \geq 0$, also gilt die Ungleichung auf der rechten Seite dieser Äquivalenz. Es folgt, dass auch die linke Ungleichung gilt, und diese besagt genau $f(x) \leq f(y)$. Also ist f monoton wachsend.

Besässe f nun einen Fixpunkt, so könnte dieser aufgrund der Definition von f nur in $[1, 2]$ liegen. Dort gilt $f(\xi) = \xi$ genau dann wenn $\xi^2 = 2$. Da $\sqrt{2}$ aber irrational ist, kann dies für $\xi \in \mathbb{Q}$ nicht erfüllt sein. Die Funktion f hat also keinen Fixpunkt.

Bitte wenden!

Bemerkungen:

- Es reicht in b) nicht als Begründung, dass in $\mathbb{Q}$ das Supremum der Menge X aus dem Beweis in a) nicht existieren muss. Dies zeigt nur, dass *dieser* Beweis für $K = \mathbb{Q}$ nicht funktioniert. Es sagt nichts über potentielle andere Arten der Beweisführung aus. Um wirklich zu *beweisen*, dass die Aussage für $K = \mathbb{Q}$ nicht gilt, muss man ein konkretes Gegenbeispiel angeben.
- Dass die in b) angegebene Funktion f auf $[1, 2]$ monoton wachsend ist, sieht man auch durch Betrachten der Ableitung, welche auf $[1, 2]$ nichtnegativ ist. Allerdings bleibt diese Beobachtung nur ein Anhaltspunkt (keine zulässige Beweismethode) bis das Konzept des Differenzierens in der Vorlesung eingeführt wurde.