Lösung 6

Hinweise

1. Verwenden Sie in a) ein halboffenes und in b) ein unbeschränktes Intervall. In c) können Sie Ihr Beispiel aus a) beliebig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen.

2. Übersetzen Sie zuerst die Aussagen „f stetig in $x_0 \in D$“ und „f stetig“ in Prädikatenlogik und bilden Sie dann die Negation (wie in Serie 1). Um dann zu zeigen, dass die gegebene Funktion nicht stetig ist, müssen Sie eine konkrete Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ angeben, für welche kein $\delta > 0$ die Forderung der Stetigkeitsdefinition erfüllt.

3. Wählen Sie in a) δ in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ und der Lipschitz-Konstanten L. Um in b) zu zeigen, dass die Wurzelfunktion gleichmässig stetig ist, beweisen und verwenden Sie die Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$. Lipschitz-Stetigkeit würde bedeuten, dass die Steigung der Wurzelfunktion durch eine Konstante beschränkt ist. Dies ist aber in der Nähe eines bestimmten Punktes von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nicht der Fall. Welcher ist dies?

4. Falls $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ ist, betrachten Sie das Polynom $q := a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Dann gilt wie im Beweis von Proposition 3.15 für $|x| \geq 1$ die Abschätzung $|q(x)| \leq A|x|^{n-1}$ für eine Konstante $A \geq 0$. Folgern Sie daraus, dass das Verhalten von f für grosse $x \in \mathbb{R}$ vom Leitterm $a_n x^n$ bestimmt wird, und dass daher $f(x_1) < 0$ gilt, wenn x_1 gross und $a_n x_1^n < 0$ ist, und $f(x_2) > 0$, wenn x_2 gross und $a_n x_2^n > 0$ ist. Wenden Sie schliesslich den Zwischenwertsatz an.

5. Führen Sie in a) Induktion nach d. Im Induktionsschritt benötigen Sie die Induktionsannahme und den binomischen Lehrsatz. Leiten Sie b) aus a) ab, indem Sie $z_{d+1} = 1$ setzen.

Bitte wenden!

6. Nehmen Sie o.B.d.A. an, dass f monoton wachsend ist und bezeichnen Sie die Menge der Unstetigkeitsstellen von f mit $U(f)$. Betrachten Sie dann die Werte

$$f_-(x) := \sup\{f(x') \mid x' \in I, x' < x\},\ f_+(x) := \inf\{f(x') \mid x' \in I, x' > x\}$$

und zeigen Sie, dass für $x \in U(f)$ notwendigerweise $f_-(x) < f_+(x)$ gilt. Die Wahl einer rationalen Zahl $g(x) \in (f_-(x), f_+(x))$ definiert dann eine injektive Funktion $g\colon U(f) \to \mathbb{Q}$.

Siehe nächstes Blatt!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Sei $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $a_n > 0$ ist. (Ansonsten ersetze f durch $-f$.) Für das Polynom $q := a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung für $|x| \geq 1$

$$|q(x)| \leq |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1||x| + |a_0| \leq (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)|x|^{n-1} = A|x|^{n-1},$$

wobei $A := |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$. Für $x_1 < -A/a_n$ folgt hieraus

$$f(x_1) = a_n x_1^n + q(x_1) \leq a_n x_1^n + |q(x_1)| \leq a_n x_1^n + A|x_1|^{n-1} = (a_n x_1 + A)x_1^{n-1} < 0,$$

da $n-1 = \deg f - 1$ nach Annahme gerade und somit $x_1^{n-1} = |x_1|^{n-1} > 0$ ist. Analog gilt für $x_2 > A/a_n$

$$f(x_2) = a_n x_2^n + q(x_2) \geq a_n x_2^n - |q(x_2)| \geq a_n x_2^n - A|x_2|^{n-1} = (a_n x_2 - A)x_2^{n-1} > 0.$$

Da f als Polynomfunktion stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle von f zwischen x_1 und x_2.

5. **a)** Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach $d \in \mathbb{N}$. Für $d = 1$ lautet die zu beweisende Aussage $z_1^n = z_1^n$, es ist also nichts zu zeigen. Angenommen der Multinomialsatz stimmt für ein $d \in \mathbb{N}$. Wir müssen ihn dann für $d+1$ beweisen. Seien dazu $n \in \mathbb{N}_0$ und $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$, und schreibe $\boldsymbol{z}' := (z_1, \ldots, z_d)$. Nach dem binomischen Lehrsatz und der Induktionsannahme gilt dann

$$\begin{aligned}(z_1 + \cdots + z_d + z_{d+1})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z_1 + \cdots + z_d)^k z_{d+1}^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\boldsymbol{\alpha}' \in \mathbb{N}_0^d \colon |\boldsymbol{\alpha}'|_1 = k} \binom{n}{k} \binom{k}{\boldsymbol{\alpha}'} (\boldsymbol{z}')^{\boldsymbol{\alpha}'} z_{d+1}^{n-k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir summieren also über Kombinationen einer natürlichen Zahl $0 \leq k \leq n$ und eines Multiindex $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathbb{N}_0^d$ der Länge k. Dies ist äquivalent zur Summation über Multiindizes $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^{d+1}$ der Länge n, wenn wir festlegen, dass die ersten d Einträge von $\boldsymbol{\alpha}$ durch $\boldsymbol{\alpha}'$ gegeben und der $(d+1)$-te Eintrag von $\boldsymbol{\alpha}$ genau $n-k$ sein soll. Formal setzen wir also für $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ mit $|\boldsymbol{\alpha}'|_1 = k$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}) := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d, n-k).$$

Bitte wenden!

Dann gelten

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\boldsymbol{\alpha}'} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{(\alpha_1)!\cdots(\alpha_d)!} = \frac{n!}{(\alpha_1)!\cdots(\alpha_{d+1})!} = \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}}$$

und

$$(\boldsymbol{z}')^{\boldsymbol{\alpha}'} z_{d+1}^{n-k} = z_1^{\alpha_1}\cdots z_d^{\alpha_d} z_{d+1}^{\alpha_{d+1}} = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

da $\alpha_{d+1} = n-k$. Nach Einsetzen dieser Formeln entspricht (1) genau

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^{d+1}\colon\,|\boldsymbol{\alpha}|_1=n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

und dies war genau zu zeigen.

b) Für $\boldsymbol{z} = (z_1,\dots,z_d) \in \mathbb{C}^d$ setzen wir $\boldsymbol{z}' := (z_1,\dots,z_d,1) \in \mathbb{C}^{d+1}$, und für $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\boldsymbol{\alpha}|_1 = k$ ähnlich wie in Teil a) $\boldsymbol{\alpha}' := (\alpha_1,\dots,\alpha_d, n-k)$. Dann gilt unter Verwendung des Multinomialsatzes für $\boldsymbol{z}'$

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^{d}\colon\,|\boldsymbol{\alpha}|_1\le n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}'\in\mathbb{N}_0^{d+1}\colon\,|\boldsymbol{\alpha}'|_1=n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}'} (\boldsymbol{z}')^{\boldsymbol{\alpha}'} = (z_1+\cdots+z_d+1)^n,$$

da nach Definition

$$\binom{n}{\boldsymbol{\alpha}'} = \frac{n!}{(\alpha_1)!\cdots(\alpha_d)!(n-k)!} = \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}}$$

und

$$(\boldsymbol{z}')^{\boldsymbol{\alpha}'} = z_1^{\alpha_1}\cdots z_d^{\alpha_d}\cdot 1^{n-k} = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

6. Sei o.B.d.A. f monoton wachsend (ansonsten ersetze f durch $-f$). Sei weiters $U(f)$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f und $x \in U(f)$. Wir betrachten die Grössen

$$f_-(x) := \sup\{f(x') \mid x' \in I, x' < x\},\ \ f_+(x) := \inf\{f(x') \mid x' \in I, x' > x\}.$$

Da f monoton wachsend ist, gilt sicherlich $f_-(x) \le f(x) \le f_+(x)$. Wir behaupten, dass sogar $f_-(x) < f_+(x)$ gelten muss. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann gilt $f_-(x) = f(x) = f_+(x)$ und für $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der definierenden Eigenschaft von Supremum und Infimum Punkte $x'(\varepsilon), x''(\varepsilon) \in I$ mit $x'(\varepsilon) < x < x''(\varepsilon)$ und

$$f(x) - \varepsilon < f(x'(\varepsilon)) \le f(x) \le f(x''(\varepsilon)) < f(x) + \varepsilon.$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus der Monotonie von f folgt dann $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, oder äquivalent $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, für jedes $y \in (x'(\varepsilon), x''(\varepsilon))$. Dies bedeutet aber, dass f in x stetig ist. In jeder Unstetigkeitsstelle $x \in U(f)$ muss also tatsächlich $f_-(x) < f_+(x)$ gelten.

Wir wählen nun zu jedem $x \in U(f)$ eine rationale Zahl $g(x) \in (f_-(x), f_+(x))$. Dies ist möglich aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und definiert eine Abbildung $g\colon U(f) \to \mathbb{Q}$. Sind $x_1, x_2 \in U(f)$ mit $x_1 < x_2$, so wissen wir nach den Definitionen von g, f_- und f_+, dass auch

$$g(x_1) < f_+(x_1) \leq f_-(x_2) < g(x_2)$$

gilt. Die Funktion $g\colon U(f) \to \mathbb{Q}$ ist also streng monoton wachsend und damit injektiv, was zeigt, dass die Menge $U(f)$ der Unstetigkeitsstellen von f höchstens so mächtig wie $\mathbb{Q}$, also höchstens abzählbar ist.