Lösung 7

Hinweise

1. Unterscheiden Sie die drei Fälle $0 \leq a < b$, $a < 0 \leq b$ und $a < b < 0$. Nach der Fallunterscheidung bemerkt man, dass es einen einzelnen simplen Ausdruck gibt, der in allen Fällen das passende Resultat liefert.

2. Verwenden Sie t selbst als obere bzw. untere Treppenfunktion für t, um zu zeigen, dass $\underline{I}(t) = \overline{I}(t) = \int_a^b t \, \mathrm{d}x$ gilt.

3. Finden Sie eine Konstante $M \geq 0$, für welche $\left| \int_x^y f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq M|y - x|$ für alle $a \leq x \leq y \leq b$ gilt.

4. Für „$\Longrightarrow$" nehmen Sie an, dass $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$ ist, und folgern Sie daraus unter Verwendung der Stetigkeit von f, dass $\int_a^b f \, \mathrm{d}x \geq \frac{f(x_0)}{2}\delta$ für ein geeignetes $\delta > 0$.

5. Für (a) approximieren Sie g von oben und unten durch Treppenfunktionen. Bei hinreichend guter Approximation und Feinheit der zugehörigen Zerlegungen können Sie diese Treppenfunktionen so modifizieren, dass sie zu oberen bzw. unteren Treppenfunktionen für fg werden, deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen. Verwenden Sie nun Proposition 4.12(iii). In (b) wählen sie Punkte $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, an denen f Minimum respektive Maximum annimmt. Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf eine geeignete Funktion an, um ein ξ mit der gewünschten Eigenschaft zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ zu finden. Suchen Sie in (c) nach einem Gegenbeispiel. Beispielsweise können Sie mit einer Funktion $g \neq 0$ mit $\int_a^b g \, \mathrm{d}x = 0$ zu beginnen.

6. Verwenden Sie in beiden Teilaufgaben Proposition 4.12(iii). Bemerken Sie für (a), dass die Menge $f_1^{-1}\big(\big[\frac{1}{q},\infty\big)\big)$ für jedes $q \in \mathbb{N}$ endlich ist, und verwenden Sie dies, um Treppenfunktionen $o_q \geq f_1$ mit $\int_0^1 o_q \, \mathrm{d}x = \frac{1}{q}$ zu konstruieren. Die Funktion f_2 in (b) ist über jedes Intervall $\big[\frac{1}{n}, 1\big]$ Riemann-integrierbar. (Wieso?) Auf Intervallen dieser Form kann das Integral von f_2 also beliebig gut von oben und unten durch Integrale von Treppenfunktionen approximiert werden. Setzen Sie solche Treppenfunktionen nun geeignet auf $[0, 1]$ fort.

Siehe nächstes Blatt!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 2, 3, 4 und 6 zur Verfügung gestellt.

2. Um zu zeigen, dass t Riemann-integrierbar ist und das Riemann-Integral von t mit dem Integral von t als Treppenfunktion übereinstimmt, müssen wir zeigen, dass

$$\underline{I}(t) = \overline{I}(t) = \int_a^b t \, \mathrm{d}x$$

gilt. Nach Definition ist $\underline{I}(t) = \sup \mathcal{U}(t)$ und $\overline{I}(t) = \inf \mathcal{O}(t)$, wobei $\mathcal{U}(t)$ die Menge

$$\mathcal{U}(t) = \left\{ \int_a^b u \, \mathrm{d}x \;\middle|\; u \in \mathcal{TF}([a,b]), u \leq t \right\}$$

der Untersummen von t und $\mathcal{O}(t)$ die Menge

$$\mathcal{O}(t) = \left\{ \int_a^b o \, \mathrm{d}x \;\middle|\; o \in \mathcal{TF}([a,b]), o \geq t \right\}$$

der Obersummen von t ist. Aufgrund der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen (Lemma 4.8) gilt für Treppenfunktionen $u \leq t \leq o$ stets

$$\int_a^b u \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b o \, \mathrm{d}x,$$

also nach Bilden von Supremum auf der linken und Infimum auf der rechten Seite auch

$$\underline{I}(t) \leq \overline{I}(t). \tag{1}$$

Da t aber selbst eine Treppenfunktion mit $t \leq t$ ist und $\int_a^b t \, \mathrm{d}x$ daher sowohl ein Element von $\mathcal{U}(t)$ als auch von $\mathcal{O}(t)$ ist, gilt auch

$$\underline{I}(t) = \sup \mathcal{U}(t) \geq \int_a^b t \, \mathrm{d}x \geq \inf \mathcal{O}(t) = \overline{I}(t). \tag{2}$$

Aus den beiden Ungleichungen (1) und (2) folgt nun direkt $\underline{I}(t) = \overline{I}(t)$.

Bitte wenden!

3. Da f als Riemann-integrierbare Funktion beschränkt ist, existiert ein $M \geq 0$ mit $|f| \leq M$. Für $x, y \in [a, b]$ mit $x \leq y$ gilt dann aufgrund von Intervalladditivität (Satz 4.26), Dreiecksungleichung und Monotonie (Satz 4.24) des Riemann-Integrals

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_x^y M\,\mathrm{d}t = M(y-x) = M|y-x|. \end{aligned}$$

Wegen $|F(y) - F(x)| = |F(x) - F(y)|$ und $|y - x| = |x - y|$ gilt diese Ungleichung auch für $x > y$. Wir haben also

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x|$$

für alle $x, y \in [a, b]$, und somit die Lipschitz-Stetigkeit von F nachgewiesen. Damit ist F auch gleichmässig stetig und insbesondere stetig.

4. Für die Richtung „$\Longleftarrow$“ ist nur zu bemerken, dass nach Konstruktion des Riemann-Integrals $\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.

Für „$\Longrightarrow$“ nehmen wir an, dass $\int_a^b f\,\mathrm{d}x = 0$ aber $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$ gilt. Dann liefert die Stetigkeit von f ein $\delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] =: O$. Die umgekehrte Dreiecksungleichung impliziert nun

$$f(x) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$$

für alle $x \in O$. Wegen $f \geq 0$ folgt hieraus $f \geq \frac{f(x_0)}{2} \mathbb{1}_O$, also mit der Monotonie des Riemann-Integrals auch

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b \frac{f(x_0)}{2} \mathbb{1}_O\,\mathrm{d}x \geq \frac{f(x_0)}{2}\delta > 0,$$

da O ein Teilintervall von $[a, b]$ mit Länge zumindest δ ist[1]. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b f\,\mathrm{d}x = 0$.

Um einzusehen, dass die Implikation „$\Longrightarrow$“ für nichtnegative Riemann-integrierbare Funktionen nicht notwendigerweise gilt, reicht es eine Treppenfunktion zu betrachten, die abgesehen von den Sprungstellen konstant 0 ist. Konkret setze also z.B. $a = 0$, $b = 1$, $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$. Dann ist f eine nichtnegative Treppenfunktion (also Riemann-integrierbar) mit $\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = 0$ aber $f \neq 0$.

[1] Im Fall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ wäre die Länge sogar 2δ, aber dies muss nicht gelten, da x_0 ein Randpunkt von $[a, b]$ sein könnte. Entweder die linke oder rechte Hälfte von $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ muss allerdings in $[a, b]$ enthalten sein, da wir $\delta < \frac{b-a}{2}$ gefordert haben.

Siehe nächstes Blatt!

6. **a)** Die Definition von f_1 impliziert, dass für $q \in \mathbb{N}$

$$G_q := f_1^{-1}\left(\left[\frac{1}{q}, \infty\right)\right) = \left\{ \frac{p'}{q'} \;\middle|\; 1 \leq q' \leq q, 0 \leq p' \leq q' \right\}$$

gilt. Insbesondere ist G_q endlich. Also ist $o_q := \mathbb{1}_{G_q} + \frac{1}{q}$ eine Treppenfunktion mit $o_q \geq f_1$ und $\int_0^1 o_q \, \mathrm{d}x = \frac{1}{q}$. Weiters ist $u = 0$ eine untere Treppenfunktion mit $\int_0^1 u \, \mathrm{d}x = 0$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so sind also für hinreichend grosses $q \in \mathbb{N}$ die Funktionen o_q und u Treppenfunktionen mit $u \leq f_1 \leq o_q$ und

$$\int_0^1 (o_q - u) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

Nach Proposition 4.12(iii) ist f_1 also Riemann-integrierbar (mit $\int_0^1 f_1 \, \mathrm{d}x = 0$).

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_2 auf $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ stückweise monoton und beschränkt und damit auf Intervallen dieser Form Riemann-integrierbar (vgl. Definition 4.33 und Korollar 4.34 im Skript). Wir wollen wieder Proposition 4.12(iii) verwenden um hieraus die Riemann-Integrierbarkeit über ganz $[0, 1]$ zu folgern. Sei also $\varepsilon > 0$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, sowie Treppenfunktionen o_n', u_n' auf $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ mit $u_n' \leq f_2|_{[1/n,1]} \leq o_n'$ und

$$\int_{1/n}^1 (o_n' - u_n') \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Diese existieren aufgrund von Proposition 4.12(iii). Setze o_n' durch den Wert 1 und u_n' durch den Wert 0 auf ganz $[0, 1]$ fort und nenne die so erhaltenen Funktionen o_n respektive u_n. Dann sind o_n, u_n Treppenfunktionen auf $[0, 1]$ mit $u_n \leq f_2 \leq o_n$ und es gilt wegen der Intervalladditivität des Riemann-Integrals

$$\begin{aligned} \int_0^1 (o_n - u_n) \, \mathrm{d}x &= \int_0^{1/n} (o_n - u_n) \, \mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 (o_n - u_n) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1/n} 1 \, \mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 (o_n' - u_n') \, \mathrm{d}x \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

aufgrund von (3) und der Wahl von n. Nach Proposition 4.12(iii) beweist dies die Riemann-Integrierbarkeit von f_2.

Bemerkung: Den Wert von $\int_0^1 f_2 \, \mathrm{d}x$ erhalten wir hier mit dieser Methode nicht. Man kann zeigen, dass $\int_0^1 f_2 \, \mathrm{d}x = 1 - \gamma$ gilt, wobei γ die *Euler-Mascheroni-Konstante* bezeichnet. Wir werden darauf in einer der folgenden Serien zurückkommen.