D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 8

Hinweise

1. Verwenden Sie in (a) die üblichen Grenzwertrechenregeln. In (b) erweitern Sie mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Wenden Sie in (c) eine Summenformel an.

2. Arbeiten Sie direkt mit den Definitionen. Für ein Gegenbeispiel müssen Sie D und die Cauchy-Folge $(x_n)_n$ so wählen, dass der Grenzwert von $(x_n)_n$ nicht in D liegt.

3. Setzen Sie die Definition von x^α ein. Ersetzen Sie dann $\log(x)$ durch y und verwenden Sie eine grundlegende Abschätzung für $\exp$.

4. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a|.$$

In letzterer Summe sind die Terme $|a_k - a|$ klein, wenn k hinreichend gross ist, und der Vorfaktor $1/n$ sorgt dafür, dass die Summanden mit kleinem k keine Rolle spielen. Eine alternierende Folge liefert ein Beispiel in welchem $(b_n)_n$ konvergiert, $(a_n)_n$ jedoch nicht.

5. Die einzigen möglichen Kandidaten für den Grenzwert in (a) sind die Lösungen der *Fixpunktgleichung* $x = 1 + \frac{1}{x}$. Bemerken Sie dann, dass die Teilfolge $(x_{2n-1})_n$ monoton wachsend und $(x_{2n})_n$ monoton fallend ist. Diese Teilfolgen sind also konvergent. Wieso stimmen Ihre Grenzwerte überein? In (b) stellt man fest, dass die Quotienten f_{n+1}/f_n dieselbe Rekursion wie die Folge $(x_n)_n$ aus (a) erfüllen.

6. Die Folge $(a_n)_n$ muss unendlich oft zwischen I und S „hin- und herwandern“. Wegen $a_{n+1} - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ geschieht dies in immer kleineren Schritten. Die Folge kommt daher unendlich oft in die Nähe von jedem Punkt zwischen I und S. Diese Idee zu formalisieren ist Ihre Aufgabe in (a). In (b) können Sie sich auch von der Idee des Hin- und Herwanderns leiten lassen.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 3, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

3. Per Definition ist $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ (vgl. Abschnitt 5.3.8 im Skript). Da $\log$ bijektiv von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$ ist, reicht es also nach Setzen von $y := \log(x)$ ein $C_\alpha > 0$ zu finden, so dass die Ungleichung

$$C_\alpha^{-1} y \leq \exp(\alpha y) \tag{1}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Unter Verwendung der Abschätzung $\exp(x) \geq 1 + x$ (vgl. (5.7) im Skript) erhalten wir aber sofort

$$\exp(\alpha y) \geq 1 + \alpha y \geq \alpha y$$

für jedes $y \in \mathbb{R}$. Mit der Wahl $C_\alpha := \alpha^{-1}$ ist (1) also für jedes $y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

5. **a)** Die erste Feststellung ist, dass aufgrund der Rekursionsformel und des Startwerts $x_1 = 1$ die Folge $(x_n)_n$ durch 1 nach unten beschränkt ist. Weiters muss der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ <u>falls er existiert</u> die Fixpunktgleichung

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

erfüllen, wie durch Durchführung des Grenzübergangs in der Rekursionsformel folgt. Diese Gleichung hat als einzige Lösungen die Zahlen $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ist, bleibt als einziger Kandidat für den Grenzwert der *goldene Schnitt* $g := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ übrig. Wir präsentieren nun zwei Möglichkeiten für den Beweis, dass tatsächlich $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ gilt.

Monotone Teilfolgen: Durch Berechnen einiger Folgenglieder gelangt man zur Vermutung, dass sich die Teilfolge $(x_{2n-1})_n$ der ungeraden Folgenglieder von unten monoton wachsend an g annähert, während $(x_{2n})_n$ von oben monoton fallend gegen g strebt. Die 2-Schritt-Rekursionsgleichung für x_n (welche die Rekursionsgleichung für die ungerade und gerade Teilfolge darstellt) lautet

$$x_{n+2} = 1 + \frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_n}} = 1 + \frac{x_n}{x_n + 1}. \tag{2}$$

Durch Umformen sieht man anhand dessen, dass für $n \in \mathbb{N}$ sowohl

$$x_{n+2} \geq x_n \iff \left(x_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0 \iff x_n \leq g$$

Siehe nächstes Blatt!

als auch

$$x_{n+2} \leq g \iff x_n \leq g$$

gilt. Wegen $x_1 = 1 \leq g$ und $x_2 = 2 \geq g$ folgt aus diesen Äquivalenzen, dass die Teilfolge $(x_{2n-1})_n$ durch g nach oben beschränkt und monoton wachsend ist, während $(x_{2n})_n$ durch g nach unten beschränkt und monoton fallend ist. Satz 5.34 über die Konvergenz von monotonen Folgen impliziert also die Konvergenz dieser Teilfolgen. Bestimmen der positiven Lösungen der zur 2-Schritt-Rekursionsgleichung (2) gehörigen Fixpunktgleichung $x = 1 + \frac{x}{x+1}$ ergibt, dass wiederum nur g als Grenzwert in Frage kommt. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = g = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$, und damit $\lim_{n\to\infty} x_n = g$.

Geometrische Folge als obere Schranke: Wir wollen direkt zeigen, dass der Abstand $|x_n - g|$ gegen 0 strebt und untersuchen deshalb den Zusammenhang zwischen $|x_{n+1} - g|$ und $|x_n - g|$. Wir finden

$$|x_{n+1} - g| = \left|1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right| = \frac{|x_n - g|}{x_n g} \leq g^{-1}|x_n - g|,$$

wobei wir die Rekursionsgleichung, $g = 1 + \frac{1}{g}$ und $x_n \geq 1$ verwendet haben. Induktiv folgt

$$0 \leq |x_{n+1} - g| \leq g^{-n}|x_1 - g|.$$

Wegen $g^{-1} < 1$ strebt g^{-n} für $n \to \infty$ gegen 0 (vgl. Beispiel 5.13), und zusammen mit dem Sandwichlemma (Lemma 5.31) zeigt dies

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - g| = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} x_n = g$.

b) Es gilt $f_n > 0$ für alle $n \geq 2$. Wir können die Rekursionsformel also durch f_{n+1} dividieren und erhalten

$$f_{n+2}/f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_{n+1}/f_n}$$

für $n \geq 1$. Weiters gilt $f_3/f_2 = 1$. Also ist $(f_{n+2}/f_{n+1})_n$ genau die Folge $(x_n)_n$ aus (a) (sie hat denselben Startwert und erfüllt dieselbe Rekursionsgleichung) und konvergiert somit gegen g. Die Indexverschiebung ist für den Grenzwert natürlich irrelevant, also folgt auch $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = g$.

6. **a)** Aus Satz 5.44 folgt, dass alle Häufungspunkte von $(a_n)_n$ im Intervall $[I, S]$ enthalten sind und dass I und S Häufungspunkte sind. Es bleibt somit nachzuweisen, dass jeder Punkt $x \in (I, S)$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist. Wir formalisieren für den Beweis die im Hinweis skizzierte Idee. Nach Proposition 5.23

Bitte wenden!

reicht es zu zeigen, dass es für gegebenes $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ gibt. O.B.d.A. können wir annehmen, dass ε so klein ist, dass $x - \varepsilon > I$ und $x + \varepsilon < S$ ist. Wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1} - a_n| < 2\varepsilon$ für alle $n \geq N_0$ und sei $N \geq N_0$. Dann gibt es nach Satz 5.40 Indizes $n_2 > n_1 \geq N$ mit $a_{n_1} < x-\varepsilon$ und $a_{n_2} > x+\varepsilon$. Setze nun $n := \max\{n \in [n_1, n_2] \cap \mathbb{N} \mid a_n < x+\varepsilon\}$. Dann gilt $n_2 > n \geq n_1 \geq N$, $a_n < x + \varepsilon$ und $a_{n+1} \geq x + \varepsilon$. Wegen $|a_{n+1} - a_n| < 2\varepsilon$ impliziert dies auch

$$a_n \geq a_{n+1} - |a_{n+1} - a_n| > x + \varepsilon - 2\varepsilon = x - \varepsilon,$$

und wir erhalten $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Wir haben also für jedes $N \geq N_0$ ein $n \geq N$ mit $a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ gefunden, was bedeutet, dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder enthält. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist x also ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$.

b) Definiere für $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k < 2^m$

$$a_{2^m+k} := \begin{cases} \frac{k}{2^m}, & m \text{ gerade,} \\ 1 - \frac{k}{2^m}, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt $0 \leq a_n \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $a_{2^{2m}} = 0$ und $a_{2^{2m+1}} = 1$ für $m \in \mathbb{N}_0$, also $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$. Ausserdem gilt für $2^m \leq n < 2^{m+1}$ nach Konstruktion stets $|a_{n+1} - a_n| = 2^{-m}$, was $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ zur Folge hat.