Lösung 9

Hinweise

1. Die Existenz bestimmter Objekte im Beweis basiert auf dem Vollständigkeitsaxiom. Welche sind dies?

2. Verwenden Sie in a) Polynomdivision. In b) teilen Sie Zähler und Nenner durch den am schnellsten wachsenden Term. Analysieren Sie in c) das Verhalten beider Faktoren und überlegen Sie dann, ob/wie Sie daraus etwas über deren Produkt folgern können.

3. Schlagen Sie die präzise Bedeutung der auftretenden Landau-Notation nach.

4. Betrachten Sie Riemann-Summen für die stetigen Funktionen $[1, 2] \ni x \mapsto 1/x^2$ und $[q, p] \ni x \mapsto 1/x$.

5. Finden Sie in a) eine Funktion $f \in \mathcal{R}([a, b]) \setminus \{0\}$ mit $\|f\|_1 = 0$. Verifizieren Sie in b) die Eigenschaften einer Norm. Für die positive Definitheit benötigen Sie eine Aufgaben aus Serie 7. Die Idee in c) ist eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen zu finden, die bzgl. $\|\cdot\|_1$ „gegen eine unstetige Funktion konvergiert".

6. Verwenden Sie in a) eine $\inf$-$\sup$- bzw. $\sup$-$\inf$-Konstruktion. In Teil b) benötigen Sie ausschliesslich die Definitionen. Stellen Sie nur sicher, dass Ihr Beweis auch die Fälle $A = \pm\infty$ abdeckt. Bemerken Sie in c), dass $\liminf_{\mathcal{F}} f \leq \liminf_{\mathcal{F}'} f$ und $\limsup_{\mathcal{F}'} f \leq \limsup_{\mathcal{F}} f$ gelten und verwenden Sie b).

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 3, 4 und 6 zur Verfügung gestellt.

3. Per Definition ist zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $x \in D \cap \dot{U}_\delta(x_0)$ stets

$$|f_1(x)f_2(x)| \leq \varepsilon |g_1(x)g_2(x)| \tag{1}$$

gilt. Sei also $\varepsilon > 0$. Die Bedingung $f_1(x) = O(g_1(x))$ $(x \to x_0)$ besagt, dass es $M > 0$ und $\delta_1 > 0$ gibt mit

$$|f_1(x)| \leq M|g_1(x)| \tag{2}$$

für alle $x \in D \cap \dot{U}_{\delta_1}(x_0)$. Weiters folgt aus $f_2(x) = o(g_2(x))$ $(x \to x_0)$, dass es ein $\delta_2 > 0$ gibt mit

$$|f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}|g_2(x)| \tag{3}$$

für $x \in D \cap \dot{U}_{\delta_2}(x_0)$. Für $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ und $x \in D \cap \dot{U}_\delta(x_0)$ ergeben (2) und (3) nun unmittelbar (1).

4. In beiden Fällen ist die Strategie eine Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zu finden, so dass der gegebene Ausdruck eine Riemann-Summe $R(f, \mathfrak{Z}_n, \mathbf{z}_n)$ von f für eine geeignete Zerlegung $\mathfrak{Z}_n$ mit $|\mathfrak{Z}_n| \to 0$ für $n \to \infty$ und eine erlaubte Wahl $\mathbf{z}_n$ von Zwischenpunkten ist. Dann folgt aus Satz 5.79 über die Konvergenz von Riemann-Summen, dass der fragliche Grenzwert existiert und den Wert $\int_a^b f \,\mathrm{d}x$ hat.

a) Wir wählen als Funktion $f_1\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x^2$. Diese ist stetig und somit Riemann-integrierbar. Als Zerlegung wählen wir

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{1 < 1 + \frac{1}{n} < \cdots < 1 + \frac{n-1}{n} < 2\right\},$$

welche $|\mathfrak{Z}_n| = 1/n \to 0$ für $n \to \infty$ erfüllt, und für die Zwischenpunkte

$$\mathbf{z}_n := \left(1, 1 + \frac{1}{n}, \ldots, 1 + \frac{n-1}{n}\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} R(f_1, \mathfrak{Z}_n, \mathbf{z}_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} f_1\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(n+k)^2} \\ &= n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right), \end{aligned}$$

also genau den Ausdruck aus der Angabe. Der gegebene Grenzwert existiert also aufgrund von Satz 5.79 und sein Wert ist genau

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) Wir wählen hier als Funktion $f_2\colon [q,p] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Diese ist stetig, also Riemann-integrierbar. Als Zerlegung wählen wir

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{q = \frac{nq}{n} < \frac{nq+1}{n} < \dots < \frac{np-1}{n} < \frac{np}{n} = p\right\},$$

für welche wieder $|\mathfrak{Z}_n| = 1/n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, und für die Zwischenpunkte

$$\mathbf{z}_n := \left(q = \frac{nq}{n}, \frac{nq+1}{n}, \dots, \frac{np-1}{n}\right).$$

Wir erhalten

$$R(f_2, \mathfrak{Z}_n, \mathbf{z}_n) = \sum_{k=nq}^{np-1} f_2\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n} = \sum_{k=nq}^{np-1} \frac{1}{k},$$

also wieder genau den Ausdruck aus der Angabe. Wie zuvor folgt aus Satz 5.79 die Existenz des gegebenen Grenzwerts, und sein Wert ist genau

$$\int_q^p \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

6. a) Wir verallgemeinern diejenigen Ausdrücke in den Definitionen 5.37 und 5.38, in denen kein Grenzwert vorkommt. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \limsup_{\mathcal{F}} f &:= \inf_{F\in\mathcal{F}} \sup_{x\in F} f(x) \quad \text{und} \\ \liminf_{\mathcal{F}} f &:= \sup_{F\in\mathcal{F}} \inf_{x\in F} f(x). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Als erstes bemerken wir, dass stets $\liminf_{\mathcal{F}} f \leq \limsup_{\mathcal{F}} f$ gilt. Für die Richtung „$\Longrightarrow$“ nehmen wir an, dass $\lim_{\mathcal{F}} f = A \in \overline{\mathbb{R}}$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $F \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \in U_{\varepsilon/2}(A)$ für alle $x \in F$. Insbesondere liegen $\inf_{x \in F} f(x)$ und $\sup_{x \in F} f(x)$ in $U_\varepsilon(A)$[1]. Wegen

$$\inf_{x \in F} f(x) \leq \liminf_{\mathcal{F}} f \leq \limsup_{\mathcal{F}} f \leq \sup_{x \in F} f(x)$$

und da $U_\varepsilon(A)$ ein Intervall ist, liegen also auch $\liminf_{\mathcal{F}} f$ und $\limsup_{\mathcal{F}} f$ in $U_\varepsilon(A)$. Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$A = \liminf_{\mathcal{F}} f = \limsup_{\mathcal{F}} f. \tag{4}$$

Für „$\Longleftarrow$“ sei (4) vorausgesetzt. Aufgrund der Definitionen in a) gibt es dann für gegebenes $\varepsilon > 0$ Mengen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ mit $\sup_{x \in F_1} f(x), \inf_{x \in F_2} f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Für $F := F_1 \cap F_2$ gilt dann $F \in \mathcal{F}$, und für $x \in F$ erhalten wir

$$\inf_{x \in F_2} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in F_1} f(x).$$

Da $U_\varepsilon(A)$ ein Intervall ist folgt hieraus $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ für jedes $x \in F$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war haben wir somit $\lim_{\mathcal{F}} f = A$ nachgewiesen.

Der Zusatz über die Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt unmittelbar aus der soeben bewiesenen Charakterisierung der Konvergenz. In der Tat, im Falle der Konvergenz muss der Grenzwert notwendigerweise der (eindeutige) Wert $A = \liminf_{\mathcal{F}} f = \limsup_{\mathcal{F}} f$ sein.

c) Ist $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, so folgt aus den Definitionen in a) und den Eigenschaften von Supremum und Infimum direkt $\liminf_{\mathcal{F}} f \leq \liminf_{\mathcal{F}'} f$ und $\limsup_{\mathcal{F}'} f \leq \limsup_{\mathcal{F}} f$. Ist f entlang $\mathcal{F}'$ konvergent, so erhalten wir unter Verwendung von Teil b) also

$$\liminf_{\mathcal{F}} f \leq \liminf_{\mathcal{F}'} f = \lim_{\mathcal{F}'} f = \limsup_{\mathcal{F}'} f \leq \limsup_{\mathcal{F}} f.$$

[1] Damit dies auch für $A = \pm\infty$ zutrifft arbeiten wir mit den Konventionen $U_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right]$ und $U_\varepsilon(-\infty) = \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$.