D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis I — HS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 11

Hinweise

1. Betrachten Sie Wurzeln aus -1.

2. Für a) und b) können Sie das Quotientenkriterium (Lemma 6.59) verwenden. Beachten Sie in c) den Exponenten n^2 bei z.

3. Addieren und Subtrahieren Sie im Zähler $f(a)$ und formen Sie so um, dass Sie zwei Differenzenquotienten wie in der Definition der Differenzierbarkeit erhalten. Um die Umkehrung zu widerlegen betrachten Sie z.B. die Betragsfunktion im Punkt $a = 0$.

4. Wenden Sie für die Identität in a) die Additionsformel für den Sinus auf die Zahlen $(z + w)/2$ und $\pm(z - w)/2$ an. Um auf die strenge Monotonie zu schliessen bemerken Sie, dass Sinus und Kosinus auf dem Intervall $(0, \pi/2)$ strikt positiv sind. In b) benötigen Sie neben den Formeln aus Korollar 6.74 nur, dass der Sinus eine ungerade Funktion ist. In c) verwenden Sie $\sin(x) \neq 0$ für $x \in (0, \pi)$ und eine ähnliche Argumentation wie in b) um festzustellen, dass die gegebenen Zahlen genau die reellen Nullstellen von Sinus bzw. Kosinus sind. Um zu zeigen, dass Sinus und Kosinus keine Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ besitzen, verwenden Sie die ursprüngliche Definition dieser Funktionen und die Formel $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$.

5. Zeigen Sie, dass die (stetigen) Partialsummen $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ auf ganz $\overline{B_R(0)}$ gleichmässig konvergieren.

6. Nach Bestimmung des Konvergenzradius bleibt nur noch das Verhalten auf dem Rand des Konvergenzbereichs zu untersuchen. In einem Punkt des Randes ist die Divergenz schon bekannt. Verwenden Sie die Abelsche Summationsformel, um in allen anderen Punkten Konvergenz nachzuweisen.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. **a)** Die Additionsformel für den Sinus (Formel (6.13) im Skript) impliziert

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \sin\left(\frac{z+w}{2} + \frac{z-w}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \quad \text{und}\\ \sin(w) &= \sin\left(\frac{z+w}{2} - \frac{z-w}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) - \cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right),\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass der Kosinus eine gerade und der Sinus eine ungerade Funktion ist. Subtraktion dieser Gleichungen ergibt die gewünschte Formel. Um die strenge Monotonie des Sinus auf $[0, \pi/2]$ nachzuweisen seien $0 \le a < b \le \pi/2$. Dann liegen die beiden Zahlen $(a+b)/2$ und $(b-a)/2$ im Intervall $(0, \pi/2)$. Nach Definition von π besitzt der Sinus keine Nullstellen in $(0, \pi)$ und es gilt $\sin(\pi/2) = 1$ (vgl. Satz 6.73). Aufgrund der Stetigkeit des Sinus folgt hieraus mit dem Zwischenwertsatz, dass der Sinus auf $(0, \pi)$ strikt positiv ist. Unter Verwendung der Formel $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ (Korollar 6.74) ergibt dies auch strikte Positivität des Kosinus auf $(-\pi/2, \pi/2)$. Wir erhalten somit

$$\sin(b) - \sin(a) = 2\underbrace{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{>0}\underbrace{\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)}_{>0} > 0,$$

also die strenge Monotonie des Sinus auf $[0, \pi/2]$.

b) Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, bestimmen die Werte auf $[0, \pi/2]$ auch die Werte auf $[-\pi/2, \pi/2]$. Mithilfe der Formel $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ erhalten wir die Werte auf $[-\pi/2, 3\pi/2]$ und die 2π-Periodizität legt den Sinus dann auf ganz $\mathbb{R}$ fest. Ist der Sinus bekannt, ergibt die Formel $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ den Kosinus. (Für all diese Formeln siehe Korollar 6.74).

c) Aus $\sin(x) \neq 0$ für $x \in (0, \pi)$, $\sin(0) = 0$ und $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ folgt, dass die reellen Nullstellen des Sinus genau die Zahlen $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ sind. Die Formel $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ zeigt dann, dass die Zahlen $(k + 1/2)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

Siehe nächstes Blatt!

genau die reellen Nullstellen des Kosinus sind. Es bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt. Sei also $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Sinus. Die Definition des Sinus ergibt dann

$$0 = \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}.$$

Nehmen des Absolutbetrags der letzten Gleichung ergibt zusammen mit der Formel $|\exp(w)| = \exp(\mathrm{Re}(w))$ (vgl. Abschnitt 6.5.4 im Skript)

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)} = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(-\mathrm{i}z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(z)},$$

was wegen der Injektivität der reellen Exponentialfunktion $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(z)$, also $\mathrm{Im}(z) = 0$ impliziert. Dies zeigt, alle komplexen Nullstellen des Sinus reell sind. Ist z eine Nullstelle des Kosinus, so erhalten wir auf ähnliche Weise

$$0 = \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+\pi)},$$

somit

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)} = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+\pi)}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(-\mathrm{i}(z+\pi))} = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(z)},$$

also wieder $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(z)$ oder äquivalenterweise $\mathrm{Im}(z) = 0$. Es sind also auch alle Nullstellen des Kosinus reell.

5. Wir bezeichnen die Funktion aus der Aufgabenstellung mit f. Für die Wohldefiniertheit von f ist dann zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für jedes $z \in \overline{B_R(0)}$ konvergiert. Dass dies der Fall ist, beweist die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty.$$

(In der Tat, sie zeigt sogar absolute Konvergenz.) Um die Stetigkeit von f auf $\overline{B_R(0)}$ nachzuweisen reicht es aufgrund von Satz 6.48 zu zeigen, dass die (stetigen) Partialsummen $f_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ auf $\overline{B_R(0)}$ gleichmässig gegen f konvergieren. Dies folgt jedoch unter Verwendung der Dreiecksungleichung für Reihen (vgl. Proposition 6.28) direkt aus

$$|f(z) - f_N(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n$$

für $z \in \overline{B_R(0)}$ und der Tatsache, dass die Reihenreste $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n$ der konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ für $N \to \infty$ gegen 0 konvergieren.

Bitte wenden!

6. Wir berechnen zuerst den Konvergenzradius R. Unter Verwendung des Quotientenkriteriums (Lemma 6.59) erhalten wir

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Die gegebene Potenzreihe konvergiert aufgrund von Satz 6.55 also in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert in jedem Punkt z mit $|z| > 1$. Da die harmonische Reihe divergiert (Beispiel 6.4) wissen wir weiters, dass auch im Punkt $z = 1$ Divergenz vorliegt. Es bleiben die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$ zu untersuchen. Fixiere ein solches z. Dann ergibt die Abelsche Summationsformel (Übung 3.3) für $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} z^n = \frac{1}{N} A_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{A_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n}{n(n+1)}, \tag{1}$$

wobei $A_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$ ist. Wegen $z \neq 1$ können wir A_n mithilfe der geometrischen Summenformel (Proposition 3.8) konkret berechnen. Nämlich gilt

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1},$$

sodass wir mit $|z| = 1$ die Abschätzung

$$|A_n| \leq \frac{|z|^{n+1} + |z|}{|z-1|} = \frac{2}{|z-1|} =: C$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten. Die Folge $(A_n)_n$ ist also beschränkt durch die Konstante C. Es folgt $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A_N = 0$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|}{n(n+1)} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

was die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n(n+1)}$ beweist. Wir haben also gezeigt, dass beide Terme auf der rechten Seite von (1) für $N \to \infty$ konvergieren. Somit konvergiert auch die linke Seite von (1) für $N \to \infty$, und dies bedeutet per Definition, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ im Punkt z konvergiert.