Lösung 12

Hinweise

1. In a) benötigen Sie neben de l'Hospital nur die Stetigkeit von Polynomfunktionen. In b) müssen Sie de l'Hospital zweimal anwenden. In c) schreiben Sie den vorliegenden Ausdruck zuerst als Bruch.

2. Arbeiten Sie direkt mit der Definition der Differenzierbarkeit und bemerken Sie, dass sich die auftretenden Differenzenquotienten für fg als Produkt zweier konvergenter Terme schreiben lassen.

3. Folgern Sie für a) aus dem Mittelwertsatz, dass $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$ für $x, y \in I$ durch eine Konstante beschränkt ist. Teil b) folgt aufgrund der Eigenschaften von stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen direkt aus a).

4. Dass φ glatt ist folgt aus der im Skript bewiesenen Glattheit von ψ und der Tatsache, dass φ durch elementare Operationen aus ψ gewonnen wurde. Für den Beweis der restlichen Eigenschaften stellt man als Zwischenschritt fest, dass $\varphi_0|_{(-\infty,0]} = 0$ und $\varphi_0|_{[1,\infty)} = 1$ gilt.

5. Hat die Ableitung von $g(x) = f(x) - cx$ keine Nullstelle, so ist diese Funktion monoton (vgl. MC-Aufgabe 5). Was folgt daraus für die Ableitung von f?

6. Die Existenz und Monotonieeigenschaften der einseitigen Ableitungen sind eine Konsequenz der Monotonie der Differenzenquotienten von f. Aus der einseitigen Differenzierbarkeit folgt sogleich die Stetigkeit von f. Die Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist, erhält man aus den Unstetigkeitsstellen von f'_+ bzw. f'_-.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 3, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

3. **a)** Gemäss Voraussetzung ist

$$L := \sup_{x \in I} |f'(x)| < \infty.$$

Sind nun $x, y \in I$ verschieden so gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes (Theorem 7.29) ein $\xi \in I$ mit

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi).$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|,$$

also die Lipschitz-Stetigkeit von f.

b) Ist I kompakt und f stetig differenzierbar, so ist f' als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall notwendigerweise beschränkt (Satz 3.70). Teil a) ist also direkt anwendbar.

5. Sei c ein Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$. Dem Hinweis folgend betrachten wir die Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x) - cx$ für $x \in [a, b]$. Dann ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = f'(x) - c.$$

Besitzt g' keine Nullstelle, so muss g monoton sein (sogar streng monoton, siehe MC-Aufgabe 5), also gilt entweder $g' \geq 0$, falls g monoton wachsend ist, oder $g' \leq 0$, falls g monoton fallend ist (vgl. Übung 7.36 und MC-Aufgabe 3(c)). Beachten wir zusätzlich, dass g' laut Annahme keine Nullstelle hat, so folgt $g' > 0$ oder $g' < 0$. Äquivalenterweise gilt entweder $f'(x) > c$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) < c$ für alle $x \in [a, b]$. Beide dieser Möglichkeiten widersprechen jedoch der Wahl von c. Dies zeigt, dass g' eine Nullstelle besitzen muss, also dass es ein $\xi \in [a, b]$ gibt mit $f'(\xi) = c$.

Siehe nächstes Blatt!

6. **a)** Sei $x_0 \in I$. Aufgrund der Konvexität von f gilt dann für $x_1 \leq x_2 < x_0 < x'$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

(Die zweite Ungleichung ist genau Lemma 7.39; die erste wird mit demselben Argument bewiesen.) Folglich sind die Differenzenquotienten $\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)_{x<x_0}$ monoton wachsend und für jedes $x' > x_0$ durch $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$ nach oben beschränkt. Es folgt die Existenz der linksseitigen Ableitung von f in x_0 mit

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sup_{x<x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

für jedes $x' > x_0$ (vgl. Satz 5.34 und Lemma 5.65). Genauso sind die Differenzenquotienten $\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)_{x>x_0}$ monoton wachsend und aufgrund der obigen Ungleichung von unten durch $f'_-(x_0)$ beschränkt. Daher existiert auch die rechtsseitige Ableitung und es gilt

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \inf_{x>x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'_-(x_0).$$

Es bleibt zu zeigen, dass die einseitigen Ableitungen f'_+ und f'_- monoton wachsend sind. Seien dafür $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und wähle $x' \in (x_1, x_2)$. Dann gilt angesichts des schon Gezeigten

$$\begin{aligned} f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) &= \inf_{x>x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &\leq \frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1} \leq \frac{f(x') - f(x_2)}{x' - x_2} \\ &\leq \sup_{x<x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir in der zweiten Zeile ein weiteres Mal Lemma 7.39 verwendet haben.

b) Links- und rechtsseitige Differenzierbarkeit von f implizieren links- und rechtsseitige Stetigkeit von f. Also ist f stetig. Ist f in x nicht differenzierbar, so muss aufgrund der einseitigen Differenzierbarkeit und $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ notwendigerweise $f'_-(x) < f'_+(x)$ gelten. Aufgrund von (1) folgt hieraus für $x' > x$

$$f'_-(x') \geq f'_+(x) > f'_-(x),$$

sodass f'_- im Punkt x unstetig ist. Da f'_- als monotone Funktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben kann (siehe Serie 6, Aufgabe 6), ist f in höchstens abzählbar vielen Punkten nicht differenzierbar.